



التطور المعاصر لنظرية المنطق

الكتور
ماهير عبد القادر محمد علي



دار النهضة العربية
للمطبوعات والنشر

تهران - مطبعة دار النهضة



التطور المعاصر لنظرية المنطق

اهداءات ١٩٩٤
السيد / ماهر محمد القادر
الاستاذ

التطور المعاصر لنظرية المنطق

الدكتور
ماهر عبد القادر محمد علي
كلية الآداب
جامعة ال民心阿拉伯文
جامعة ال民心阿拉伯文

دار النهضة العربية
لطباعة ونشر
الطبعة الأولى
١٩٧٣ م - بيروت





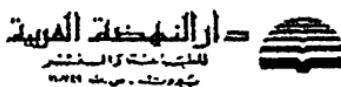
مكتبة لسان العرب

www.lisanarb.com

lisanerab.com رابط بديل

حقوق الطبع محفوظة

١٤٠٨ - ١٩٨٨ م



• الادارة: بيروت، شارع مدحت باشا، بناية

كرديبة، تلفون: ٣٠٣٨١٦

٣١٢٢١٣ / ٣٠٩٤٣

برقية: دائمة، ص. ب ١١-٧٤٩

تلفون: NAHDA 40290 LE

29354 LE

• المكتبة: شارع البستانى، بناية اسكندرانى

رقم ٣، غربى الجامعة المصرية،

تلفون: ٣١٦٢٠٢

• المستودع: بئر حسن، تلفون: ٨٣٣١٨٠



اهداء

إلى عالم المنطق الأول ...
إلى من أحببته لذاته حبا خالصا
إلى الفيلسوف والمعلم
الأستاذ الدكتور محمد ثابت الغندس

تصدير

يشير الاستعراض الدقيق لمجهودات المناطقة وعلماء الرياضيات حتى البدايات الأولى من القرن العشرين إلى الاهتمام المتزايد بقضايا المنطق الرياضي وأساليبه، وقد تبلور هذا الاتجاه في كتابات رسول العبرة، ثم في المؤلف القديم الذي أخرجه «رسل - هوایته» فيما بين الأعوام ١٩١٠ - ١٩١٣ والمسمي بـ«برنکیبیا ماتیماتیکا»، ذلك المؤلف الذي وضع القضايا موضوعها الدقيق، واستطاع أن يسطّل لنا قضايا المنطق والرياضيات برمتها في صورة رمزية دقيقة تخضع للبرهان الرياضي المحكم.

وكتاب برنکیبیا أو مبادئ الرياضيات يعتمد أول ما يعتمد على فكرة النسق الاستباطي، ولكن النسق الاستباطي أو نظرية الاستباط بأسراها تختلف من فكرة التضمن ركيزة أساسية لها، إذ لا يمكن إحكام الاستباط ونسقية بدون الاستعانة بفكرة التضمن.

وفيما بعد برنکیبیا حاول المناطقة وعلماء الرياضيات تطوير نسق المنطق الرياضي، فاتضح لهم أن من بين الأفكار التي لا بد وأن يتناولها أي نسق فكرة التضمن ذاتها، فأخذوا يعملون الفكر من أجل التوصل إلى آنساق بديلة لنسق برنکیبیا، وهنا انشئت الأبحاث المنطقية إلى اتجاهات مختلفة: نظر لويس المنطقى الأمريكى إلى تطوير الفكر داخلياً فميز بين التضمن والتضمن الدقيق، وحاول تقوين رمزية خاصة بفكرة الأساسية، وتقدم لبناء النسق،

وظل يتابع التطورات المنطقية والرياضية سنوات طويلة ويعدل في النسق بصورة أو باخرى؛ ومع ذلك ظل نسق برنكيبا كما هو وفشل البديل. ومن جانب آخر حاول لوكاشيفتش من خلال المنطق متعدد القيم أن يعثر على نسق تنسحب عليه الشروط التي تتحقق دقتها، ومع هذا جاءت رمزيته وأفكاره مختلفة أشد الاختلاف عن نسق برنكيبا. ثم أقدم هلبرت على المحاولة وأطلق صيغته الصورية المشهورة التي أراد من ورائها تأسيس نسق أكسيوماتيكي يعتمد على الصورية البحتة، ولكن لم تتحقق له فكرته المنشودة في إحلال النسق الأكسيوماتيكي مكان نسق برنكيبا. وفي اتجاه آخر كانت أبحاث كواين وهو من رواد المذهب اللوجستيقي المعاصر تسير بخطوات واسعة نحو إجراء تصحيحات وتعديلات شاملة ابتداء من المفاهيم والتصورات الأساسية للمنطق الرياضي، فطرح جانباً فكرة النسق البديل، وأخذ يطور المفاهيم الأساسية للمنطق، وقمن شروط التضمن وأسس العلاقة بين التضمن والشرط المزدوج، وميز بين الصحة والانساق المنطقية تميزاً دقيقة.

كل هذه الأفكار وتلك عرض لها القسم الأول في بحث مركز يكشف النقاب عن التطور النظري في جانب من أهم جوانب المنطق الرياضي وهو فكرة التضمن باعتبارها جوهر نظرية الاستباط.

وكان من الطبيعي أن نتابع البحث والدرس في القسم الثاني في الأنساق المتعددة المعروضة على الفكر المنطقي اليوم، فخصصنا الفصلين الخامس والسادس لتناول أهم أنساق المنطق البولندي المعاصرة، إذ تعرض لنسقين متالين هما، نسق (يان لوكاشيفتش) رائد ومؤسس المدرسة المنطقية البولندية، وفيه يقدم بعض الأفكار الجديدة التي يحاول بها أن يقيم النسق الاستباطي لنظرية حساب القضايا على أساس جديدة من التمييز الدقيق بين بعض الأفكار التي سبق لنسق برنكيبا أن تناولها. وأما النسق الثاني فهو الأحدث تطوراً والذي ظهر في عام ١٩٦٧ وقدمه «سلويسكي»

و «بوركوفسكي» في كتابهما عناصر المنطق الرياضي، عرضاً فيه لنظرية حساب القضايا، ونظرية حساب المحمول، ونظرية المجاميع، ونظريات الحساب الرياضي الأخرى المختلفة. وقد اخترنا من بينها جمِيماً نظرية حساب القضايا، على اعتبار أنها تكشف عن نسق آخر مباين لنسق لوكاشيفتش سواء في مقدمات النظرية، أم في جوانبها البرهانية التطبيقية.

ويمكن الرعم بأن نسق سلوسكي - بوركوفسكي، أبسط وأوضح الأنساق البولندية على الإطلاق، إذ يتعد عن خاصية التعقيد، ويتنزع إلى البساطة والتحليل. وفي الوقت نفسه يمثل ما انتهى إليه الفكر المنطقي البولندي حتى الآن من ابتكارات نسقية. ومع هذا يظل التساؤل عن إمكانية ابتكار بدائل نسقية مخالفة لبرنكيبيا قائماً ومفتوحاً، إذ لم يغلق باب الاجتهداد بعد، وعلى المناطقة وعلماء الرياضيات أن يُعملوا الفكر والعلم.

وبعد فقد حصل المؤلف بهذا البحث على جائزة جامعة الإسكندرية للتشجيع العلمي عام ١٩٨١ .

أرجو أن يتحقق هذا البحث بعض الإسهام النظري ، على الأقل ، في جانب إلقاء الضوء على الأساق المتغيرة .

والله أمال العوفق

Maher Hamed Al-Qadri

الإسكندرية في
١٦ مارس (آذار) ١٩٨٥

القسم الأول

فكرة التضمن في الأنماط المنطقية المعاصرة

الفصل الأول

لويس والتضمن الدقيق

يشير الاستعراض المنطقي لأبحاث المنطق حتى صدور البرنوكبيا إلى أن المنطق التقليدي منطق ثانوي القيم، بمعنى أن القضية الواحدة قد يكون لها أحد قيمتين: إما أن تكون القضية صادقة True ، أو أن تكون كاذبة False ، وقد تم التعبير عن هذه الخاصية التي تكتسبها القضايا بصورة واضحة وصريحة في ذلك المبدأ المنطقي الهام الذي صاغه أرسطو قدماً بعنوان « مبدأ الثالث المرفوع » Principle of Excluded Middle (Tertium non datur) .

إلا أن التطورات المنطقية والرياضية الحديثة، منذ القرن التاسع عشر، كشفت عن إمكانية التفكير بصورة أوسع وأشمل بعيداً عن المنطق الثنائي. القيم. وعلى سبيل المثال نحن نجد أنه من الصعب في كثير من الأحيان في الرياضيات، وبعض فروع العلم الأخرى، أن يصرح بقيمتين للقضايا، إما لأنه لا يمكننا أن نبرهن على صدق القضايا أو كذبها، أو لأن نسبة أي من قيمتي الصدق أو الكذب للقضايا يغطي بنا إلى تناقضات Contradictions . ولقد أثبتت نظرية فيرما Fermat صحة هذا الرأي الأخير، حين ذهب هذا الرياضي الخالق إلى أنه لا يمكننا أن نحل المعادلة $z^n = x^n + y^n$ ، في حالة ما إذا كانت ($n > 2$) . ورغم الجهد المضني التي بذلها الرياضيون فلم يستطع أحدهم إثبات أن نظرية فيرما صادقة أو كاذبة. ومعنى هذا أن المعادلة تتجاوز نطاق مبدأ الثالث المرفوع، ولا تخضع له مباشراً.

لقد أجبَرَ هذا الموقف الأخير المناطقة على السعي وراء محاولة العثور على قيم أخرى بدلاً من صادق أو كاذب لبعض القضايا، وبالتدريج اتجه المناطقة إلى تصورات الجهة^(١) *Modal Concepts* مثل: ممكن – *Possible* مستحيل – *impossible* – حادث – *Contingent* – ضروري – *necessary*. ومثل هذه التصورات يمكن أن تُنسبها للقضايا التي ليست هي صادقة أو كاذبة. من هنا نشأت فكرة المنطق الذي يسمح بثلاث قيم للقضايا، وهو ما نسميه المنطق ثلاثي القيم، ... الخ. كما أن هناك مصطلحًا آخرًا يطلق على المنطق الذي يتبنى أكثر من قيمتين للصدق وهو مصطلح «منطق الجهة»، *Modal Logic*، أو قد يستخدم المصطلح «المنطق متعدد القيم»، *Many-valued Logic*.

ومع أن منطق الجهات أو المنطق المتعدد القيم قد نشأ تحت تأثير المشكلات والصعوبات الرياضية والمنطقية (مثل مشكلة القضايا المخالفة)^(٢)

(١) تصور الجهة من التصورات المنطقية الماءة التي استخدماها أرسطو، وقد أشار الدكتور عبد الحميد صبره في مقدمته النطحالية الرائعة التي كتبها لتحليل «نظرية القياس الأرسطية»، إلى هذه النقطة حيث يقول: «يدل أرسطو على الجهات modalities بهذه الالفاظ التي نورده مع ترجمتها الانجليزية»:

agathon: necessary

ynaton: impossible

maton: possible

dechomenon: contingent

وهو يستخدم للفظين الآخرين حل سهل التراويف في كتاب العبارة. ولكن لما أحينا في كتاب «التحليلات الاول» مبينين مختلفين. لذلك وجوب التمييز بينها في الترجمة راجع: يان لو كاشيفتش، نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، منظمة المعرف، الاسكندرية، ١٩٦١، ص ٣٠.

(٢) يختلف الأمر حل بعض المربين أحياناً حين يترجمون المصلح الإنجليزي *Paradox*، وجريتنا وراء محاولة تصریب المصطلح بصورة تفي بأغراض البحث المنطقي، ولكن تبين بعد عناء البحث أن أفضل ترجمة هي تلك التي قام بها الدكتور عبد الحميد صبره، والتي

أو التضاديات الرياضية التي تقبل البرهان)، إلا أن هذين النوعين من المنطق أهمية في الأبحاث المعاصرة، وليس أول على هذا من تلك الأفكار القيمة التي دفع بها إلى المنطق الرياضي – منذ بداية القرن الحالي – المنطقي الأمريكي لويس^(١) C. I. Lewis والتي أراد من خلالها تشريف الأبحاث المنطقية في اتجاهات جديدة تستمد قوتها من المنطق الرياضي في صورته المعدلة كما وضعتها «رسل – هوایتهد» في «برنکیسیا ماتهایکا»، وفي

يخلل فيها ترجمة المصطلح على النحو الآتي: «من الكلمات التي يصعب ترجمتها إلى العربية كلمة «Paradox». والأصل في إطلاق هذه الكلمة أن تقال على الرأي *لو* الشاذ، ومننى المزوج أو الشذوذ هو ما تدل عليه الأداة *Para*. فنطلق مثلاً الكلمة *Paradoxes* على آراء زيونيين الأليني في استئناف الكثرة والحركة خروج هذه الآراء على ما يبدو أنه مقبول من الجميع. وقد يكون المزوج خروجاً من البديهة والمعقل، وحيثند يبدو الرأي الخارج كأنه يجوي تناقضاً. لهذا ترجم بعضهم كلمة «Paradox» بـ«التناقض»، وقد تصح هذه الترجمة في بعض الأحيان إلى حد ما. وقد يبرز أن تترجم الكلمة «Paradox» في بعض استعمالاتها الثائمة بلفظ «المفارقة» ولكن لتلك الكلمة في المنطق الحديث معنى اصطلاحياً لا يغدو من التبييز بينه وبين التناقض تمييزاً قاطعاً، وقد دللنا على ذلك المعنى بكلمة «المخالفة»، فالقضية «المخالفة»، *Paradoxical* هي قضية يتلزم عند افتراض صدقها أنها كاذبة. ويلزم عند افتراض كذبها أنها صادقة، في حين أن القضية المتناقضة هي قضية كاذبة وحسب. والمناقشة حين يتكلمون عن «خلافات»، «رسل» مثلاً، إنما يقصدون قضايا من ذلك النوع الذي وصفناه.

راجع: يان لوکاشینش، نظرية القباب الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبرة، ص ٢٣.

- (١) من أهم كتابات لويس في المنطق الرياضي:
- A survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918.
 - «Alternative Systems of logic», Monist, 42, 1932.
 - Lewis, C.I & C. H. Langford., Symbolic Logic, New York, 1932.
- وبعد الكتاب الأول والكتاب الثالث الذي كتب بالاشتراك مع لامپفورد من أهم إسهامات لويس في المنطق الرياضي على الإطلاق، وسوف نعتمد عليها سعياً في تبييع أفكار لويس بالإضافة إلى بعض الكتابات الأخرى مما سنتذكره في سنته.

نفس الوقت تحاول حل بعض المعضلات الأساسية التي لا زالت تستحوذ على اهتمام المناطقة وعلماء الرياضيات منذ ظهرت المتناقضات والقضايا المخالفة.

ولذا فإننا نفضل أن نتعرف على أفكار لويس المنطقية حتى نقف على مدى التطور الذي حدث في المنطق الرياضي في بعض أفكاره وقضاياها الأساسية، خاصة وأن هذه التطورات امتدت عبر نصف قرن من الزمان، ظل لويس يتابعها متابعة دقيقة منذ بداية القرن الحالي حتى منتصفه أو ما يزيد، مما يثبت أصالته في البحث ودقته وبراعته وحيويته الفكرية.

لويس وفكرة التضمن

بدأ المنطقي الأمريكي لويس أبحاثه المنطقية من خلال نقد تصورو التضمن كما عرفه برتراند رسل. فمن وجهة نظر لويس يأخذ رسل بفكرة التضمن المادي، وهذا ما لا يتفق مع أفكار لويس الأساسية، رغم أن لويس يستخدم قاعدة رسل القائلة « القضية الكاذبة تتضمن أي شيء » والقضية الصادقة متضمنة في أي شيء . مثال ذلك (« القضية الكاذبة تتضمن أي شيء ») ، « القمر مكون من الجبن الأبيض »، تتضمن القضية $2 + 2 = 4$ في نسق رسل للتضمن المادي ينتج أنه يوجد فصل من القضايا لا يمكن تطبيقه على الاستدلال الصحيح، وبصورة مماثلة يكون الفصل الفارغ محتوى في أي فصل.

يرى لويس أن النتائج الشاذة التي تنتج لدينا في هذه الحالات ترجع إلى أن علاقة التضمن عند رسل علاقة ما صدقية، لذلك فإن لويس يتوجه إلى تحديد علاقة التضمن بصورة أدق بحيث تصبح هذه العلاقة وكأنها الأساس الدقيق لإيجازه المنطقي.

يعرف لويس التضمن الدقيق **Strict Implication** على النحو التالي : « من المستحيل أن $\neg p$ تكون صادقة ، $\neg q$ كاذبة ». وعلى هذا الأساس يحاول تقديم

علاقة مفهومية بين p, q حيث يربطها بتصور «الضرورة» necessity وهذا هو التضمن الدقيق. ويستخدم لويس بعض الرموز الخاصة لتمييز فكرة التضمن الدقيق عن فكرة رسل ، وتحصر رموزه في ثلاثة أنواع :

١ - الرمز ~ ويشير به للاستحالة impossible

٢ - الرمز - ويشير به للسلب Negation

٣ - الرمز \rightarrow ويشير به للتضمن الدقيق Strict Implication

وبناء على هذه الأفكار الثلاثة يضع لويس التعريف الآتي للتضمن الدقيق ^(١):

$$p \rightarrow q = \sim(p \cdot \neg q) \quad df$$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي :

« من المستحيل أن p تكون صادقة و q تكون كاذبة »

لكن إذا كان لويس قد أراد أن يضع ذلك التعريف الدقيق للتضمن

(١) نحن نلاحظ أن لويس بهذا التعريف قد أدخل الجهات modalities إلى أساس المطتقن الرياضي، وقد كان ماك كول، Hugh Mac Coll أول من استفاد من تصور الجهة في ملقة «المتعلق الرياضي وتطبيقاته» (Symbolic logic and its Applications) الذي صدر في عام ١٩٠٦ ، وقد اعتمد لويس على مؤلفات ماك كول في هذه الفكرة. كذلك كان ماك كول يضع في اعتباره شرط الصدق أو الكذب فيما يتعلق بموجبات الأحكام modalities of Judgments : الضرورة، الحقيقة، الإمكانية. وطبقاً لرأي ماك كول فإن المحمولات الأساسية للأحكام هي: اليقين، المستحيل، صادق، كاذب، المتغير. ومن المتغير هو أنه ليس يقيناً ولا مستحيلاً. إن المتغير من الممكن أن يكون صادقاً ومن الممكن أن يكون كاذباً. وحق نكون أكثر دقة، فإن العبارة الثالثة: من الممكن لقضية p أن تكون صادقة أو كاذبة، هذه العبارة تعني أن القضية غير يقينية. ومن الواضح - عكس نسق رسل - أن التطورات التي قدمها ماك كول ثم تبناها لويس فيها بعد لها ما يقابلها في اللغة المادية.

كبديل لتعريف رسول ، فإنه يترتب على هذا أن يزودنا بنسق مختلف مقدماته عن ذلك النسق المألوف عند رسول - هو ايتهد ، أو ما نعرفه بنسق البرنكيبيا . وقد فعل لويس ، إذ نحن نجده يرتب أفكاره المنطقية في نسق دقيق بصورة توحى بأننا على وشك الالقاء بالوريث الشرعي للبرنكيبيا .

لويس ونسق المنطق الرياضي

يبدأ نسق المنطق الرياضي عند لويس بمجموعة من الأفكار الابتدائية ، ثم مجموعة من التعريفات وهي ثلاثة ، تتلوها القضايا الابتدائية التي تعد بمثابة مسلمات النسق ، والتي تأخذ أرقاماً على غرار الترميم المعهود في البرنكيبيا ، ثم ينتقل لويس من هذه وتلك إلى النظريات والبرهنة عليها مستخدماً ثلاثة قواعد أساسية هي الاستبدال ، والتقرير اللاحق ، والاستدلال .

أولاً : الأفكار الابتدائية

- ١ - القضايا ، ويرمز لها بالرموز p, q, r, \dots
- ٢ - السلب مثل $\neg p$ ~ وتعني $\neg p$ كاذبة ، أو «not - p» .
- ٣ - حاصل الضرب المنطقي Logical Product مثل $p \cdot q$ أو $(p \cdot q)$ وتعني أن كلا من p, q صادقتان .
- ٤ - الامكانية Possibility أو الاتساق الذاتي Self-Consistency مثل p^o ، وتعني أن p ممكنة ، أو تقرأ من الممكن أن تكون p صادقة .
- ٥ - التكافؤ المنطقي logical Equivalence مثل $p = q$ وهي أيضاً علاقة التعريف ^(١) .

(١) لقد تبنى لويس في كتابه A survey of symbolic logic المذكرة الابتدائية « الاستحالة » والتي يشير إليها بالرمز \sim بدلاً من الامكانية . وحق لا تختلف المذكرة بالسلب فقد أشار .

ثانياً: التعاريفات Definitions

١ - تعريف الفصل Disjunction $p \vee q$) وي يعني على الأقل واحدة من القضاياين p أو q تكون صادقة . ويعرف الفصل كما يلي :

$$11.01 \quad p \vee q = \sim p \sim q$$

٢ - تعريف التضمن الدقيق بدلالة السلب والامكانية وحاصل الضرب المنطقي .

$$11.02 \quad p \rightarrow q = \sim \diamond (p \sim q)$$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي :

ه ليس من الممكن أن تكون p صادقة ، q كاذبة .

٣ - علاقة التعريف « التكافؤ » ويعرفها على أنها تضمن دقيق مزدوج كما يلي :

$$11.03 \quad p = q = p \rightarrow q \cdot q \rightarrow p$$

ثالثاً: القضايا الابتدائية

و هذه القضايا كما سبق أن ذكرنا تعد بمثابة مسلمات النسق ^(١) ، وهي :

لفكرة السلب بالرمز (~)، ولكنه أخيراً في كتابه symbolic logic الذي دونه بالاشتراك مع لا جنورد حذف هذه الفكرة حتى يتتجنب الاختلاط ، ووضع فكرة الإمكانية التي رمز لها بالرمز (◊) . ومن ثم فإن تصور الاستحالة عنده يترافق عن طريق علاقتين هما السلب العادي (~) والإمكانية (◊) بحيث أن الرمز (~) ككل يعني عدم الإمكانية .

(١) لقد بين ماكينزي J. C. C McKinsey في مقالة له بعنوان A Reduction in the Number of Postulates for C. I. Lewis's System of Strict Implication من ص ٤٧٥ أن المسألة الخامسة ٥.١١ يمكن أن تشقق من المسلمات المنسى الأخرى .

- 11.1 $p \cdot q \rightarrow q \cdot p$
- 11.2 $p \cdot q \rightarrow p$
- 11.3 $p \rightarrow p \cdot p$
- 11.4 $(p \cdot q) \cdot r \rightarrow (q \cdot r)$
- 11.5 $p \rightarrow \sim(\sim p)$
- 11.6 $(p \rightarrow q, q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$
- 11.7 $(p \cdot q \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

لكتنا نلاحظ أن لويس في أول كتاباته ، مسح للمنطق الرمزي ، ١٩١٨ ، بدأ بالسلسلات الآتية :

- (1) $p \cdot q \rightarrow q \cdot p$
- (2) $q \cdot p \rightarrow p$
- (3) $p \rightarrow p \cdot p$
- (4) $p(q \cdot r) \rightarrow q(p \cdot r)$
- (5) $p \rightarrow \sim(\sim p)$
- (6) $(p \rightarrow q, q \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow r$
- (7) $\Diamond p \rightarrow p$
- (8) $p \rightarrow q = \sim \Diamond q \rightarrow \sim \Diamond p$

لكتنا حق في هذه الحالة يمكن أن نصل إلى النتيجة .

$$\sim \Diamond p = \sim p$$

أي أن « الاستحالات متطابقة مع الكذب » ، ومن ثم ينتهي التمييز الذي حاول لويس إقامته بين التضمن الدقيق والتضمن المادي ، وبالتالي يصبح من الممكن رد نسقه إلى ذلك النسق المعروض في البرنوكبيا ، وهذا بطبيعة الحال

يقودنا إلى ضرورة مراجعة نسق لويس ومحاولة استبدال المسلمة رقم ٤٨١
بالمسلمة الآتية:

(٨) . . . ٥ ~ ٥٩ - ٣٢ - ٥٩ - ٥٩ - ٥٩

وربما تنبه لويس إلى مثل هذه الفكرة، حين كتب المنطق الرمزي في عام ١٩٣٢ بالتعاون مع لانجفورد Langford حيث حاول أن يضع نسق المنطق في صورة أكثر صورية بحيث يمكن البرهنة فيه على عدد قليل من التغريبات، ولذلك فقد أطلق على هذا النسق المصطلح S1 ، أي النسق ١ الذي يستند إلى المسلمات من ١١.١ إلى ١١.٦ ، وبالتالي تم تعديل النسق المعروض في مؤلفه «مسح للمنطق الرمزي» مرة أخرى على أساس المسلمات ١ - ٧ ، بالإضافة إلى المسلمة (٨) وأطلق على النسق في هذه الحالة S3.

رابعاً: النظريات

يمكن اشتغال نظريات النسق عن طريق تطبيق عمليات الاستبدال أو التقرير اللاحق أو الاستدلال حيث:

١ - الاستبدال Substitution

أ - أي قضايا مرتبطة بعلاقة التكافؤ (=) يمكن أن توضع الواحدة منها مكان الأخرى.

ب - في أي قضية فإن أي متغير p, q, ..., يمكن أن توضع بدلاً منه قضية أخرى ، أو متغير قضائي ١.

والطريقة التي يمكن بواسطتها أن تحدد الرموز الابتدائية ، الأفكار الابتدائية ، لتكون قضايا يمكن تعريفها كما يلي :

- ... q, p, ..., قضايا.

- إذا كانت p قضية، إذن $p \circ$ هي قضايا.
- إذا كانت p قضايا إذن $(p \circ q)$ ، $(q = p \circ)$ هي قضايا أيضاً.

٢ - التقرير اللاحق **Adjunction**

إذا أمكن تقرير القضيتين p, q منفصلتين إذن فمن الممكن تقرير حاصل ضربها أي $(p \circ q)$.

٣ - الاستدلال **Inference**

إذا أمكن تقرير $p \circ q$. إذن فمن الممكن أيضاً تقرير q .

والإجراء الذي يمكن عن طريق تطبيقه تصبح هذه العملية معدة للبرهنة على أن النظرية ذاتية، مشابه لذلك الإجراء الذي اتبعه رسول وموايتها في البرنکيبيا، وهنا يمكن التوصل لسلسلة من النظريات.

التضمن الدقيق والتضمن المادي.

كما نعلم فإن رسول يعرف التضمن المادي والتكافؤ المادي كما يلي:

$$1.01 \quad \begin{aligned} p \circ q &= (p \circ \sim q) \\ p = q &= (p \circ q) . (q \circ p) \end{aligned}$$

فإذا وضعنا في الاعتبار التعريف الذي يقدمه لويس للتضمن الدقيق، فإنه يمكن وضع التعريف الآتي:

$$12.81 \quad p \rightarrow q \rightarrow \sim(p \sim q)$$

وعلى أساس قاعدة الاستبدال (١) فإننا نحصل على.

$$4.1 \quad p \rightarrow q \rightarrow (p \circ q)$$

أي «إذا كانت p تتضمن q تضمنا دقيقا فإن p تتضمن q تضمنا ماديا أيضا»، والمكس غير صحيح.

ومن ثم فإنه يمكننا القول بأن التضمن المادي أوسع وأشمل من التضمن الدقيق، ويترتب على هذا أنه إذا كانت $p \supset q$ مبرهنة، فإن $p \supset q$ مبرهنة أيضاً كحقيقة واضحة. وبهذه الصورة فإن كل المسلمات والتعريفات في نسق البرنكيبيا يمكن للبرهنة عليها في نسق التضمن الدقيق. إلا أننا نجد أن نسق برنكيبية في عملياته البرهانية يستخدم الاستبدال والاستدلال المرتبط بالتضمن المادي للبرهنة على كل النظريات المعروضة داخل النسق؛ لكن نسق لويس يستخدم الاستبدال كعملية أساسية للبرهان، ولا يشير إلى استخدام الاستدلال داخل النسق، ومع هذا فإن النسق يفتح الباب لامكانية استخدام الاستدلال، حيث:

74.29 $p \supset q \rightarrow q$

ذلك لأن $p \supset q$ هي نظرية، كما أن $p \supset q$ نظريات أيضاً عن طريق التقرير اللاحق. ومن ثم فإنه بتطبيق 14.29 يمكن استنتاج أن القضية p هي نظرية أيضاً، ويترتب على هذا أن أي شيء يمكن أن يستتبع بالطرق المألوفة في برنكيبية مائياً يعطا فإنه يمكن أن يستتبع أيضاً في نسق لويس.

علاقة الاتساق The Consistency Relation

وقد يلاحظ أيضاً أن تصورات الاتساق واستقلال قضيتين لا يمكن إيضاحهما تماماً في حدود تصورات التضمن المادي. وفي اللغة العادلة يقال لقضيتين إنها متسقتان مع بعضهما حينما تأخذ أحدهما كمقدمة كذب الأخرى، وبلغة المنطق الرياضي فإنـ.

($p \sim q$)

أو

$\sim (q \supset p)$

ويقال لقضيتين إنها مستقلتين إذا لم يكن اشتلاق كلامها من الأخرى
كمقدمة.

$\sim (p \supset q)$

و

$\sim (q \supset p)$

ونحن نعلم أن مسلمات أي نظرية رياضية أو منطقية يجب أن تكون مستقلة
ومتسقة، ولكننا إذا قبلنا تصور قابلية الاستباط الذي تعبّر عنه علاقة
التضمن المادي، فإنه يصبح من الواضح أنه لن توجد قضيتان متسقتان
ومستقلتان مثل ذلك.

15.3 $\sim p \supset q \rightarrow (p \supset q) \sim$

هذه النظرية تقول «إذا لم يكن من الممكن اشتلاق q من p إذن p ، q ،
 p غير مستقلتين».

كذلك فإن

15.32 $\sim p \supset q \rightarrow (p \supset \sim q) \sim$

تعني «إذا كانت p ، q غير مستقلتين إذن يمكن اشتلاق q من p »
ويرتّب على هذا المعنى نتيجة هامة هي أن p ، q ليستا مستقلتين. وبلغة
التضمن الدقيق التي يستخدمها لويس فان هذه الموضعية المخالفة تختلفي إذا

أخذنا في اعتبارنا المثلثات التي تعبّر عنها التغليطات الآتية، والتي لا يمكن البرهنة عليها ومن ثم فهي كاذبة:

$$\sim \rightarrow p \rightarrow (p \rightarrow q) \sim$$

$$\sim \rightarrow p \rightarrow (p \rightarrow q) \sim$$

$$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow q \rightarrow p$$

على هذا النحو يبدو لنا أنّ تصور الاتساق يأخذ معناه الذي يقترب من المعنى الدارج للكلمة إذا نظرنا لعلاقة التضمن كعلاقة اشتقاء. لقد رمز لويس لعلاقة الاتساق بالرمز \circ ، وهو يعرف هذه العلاقة كما يلي:

$$17.01 \quad \text{pop} = \sim (p \rightarrow q)$$

وهذا التعريف يعني أن p ، q مستقنان . وهذه الصيغة تفضي بنا إلى مجموعة أخرى من الصيغ في منطق لويس.

ولكن السؤال الأهم الآن: كيف يعالج لويس دوال الموجهات؟ وهل يمكن أن نتبين الأبعاد الجديدة في منطق لويس فيما يتعلق بالموجهات؟

دوال الموجهات وكيفية اختزالها في منطق لويس

رغم أنه من الممكن البرهنة على التكافؤ الآتي:

$$18.1 \quad \circ p = pop = \sim (p \rightarrow p)$$

إلا أن لويسلاحظ أنه يمكن استخدام هذا التعريف في تعريف تصور الإمكانية إذا أخذنا في الاعتبار تصور الاتساق أو التضمن الدقيق كمفهوم ابتدائي ، حيث:

من 18.1 $'p \circ' = p$ ممكنة ، تعني أن p متفقة مع ذاتها ، أو أن p تتضمن نفسها الذاتي .

والتعبير $(\Diamond \sim p)$ ~ الذي نكتبه كما يلي $\Diamond \sim p$ يعني « من الكذب أن p مكتبة ، أو p مستحيلة ، أو p ليست متفقة مع ذاتها ، أو p تتضمن نفيها الذاتي :

$$18.12 \quad \sim \Diamond p = \sim (\Diamond p) = p \rightarrow \sim p$$

التعبير $(\sim \Diamond p)$ أو $\sim \Diamond p$ يعني « من الممكن أن p تكون كاذبة ، أو p ليست p صادقة بالضرورة » ، أو إذا أخذنا في اعتبارنا التكافؤات :

$$18.13 \quad \Diamond \sim p = \sim p \circ \sim p = \sim (\sim p \rightarrow p)$$

هذه التعبيرات تعني أن « نفي p ليس متلقاً ، أو أن « صدق p لا يمكن أن يستتبع من نفيها الذاتي » .

والتعبير $[(\sim \Diamond p) \wedge \sim (\Diamond p)]$ أو $\sim \Diamond p$ ~ الذي يضعه لويس يعني : « من المستحيل أن تكون p كاذبة » . وبالتالي فإن $\sim p$ تكون صادقة بالضرورة ، أو بالصورة الرمزية الآتية :

$$18.14 \quad \sim \Diamond \sim p = \sim (\sim p \circ \sim p) = \sim p \rightarrow p$$

أي « نفي p ليس متلقاً ، أو يمكن استدراك صدق p من نفيها الذاتي » ، وعلى هذا فإنه يمكن مقارنة التكافؤات الآتية :

$$8.1 \quad p = p \sim (\sim p) = \sim (p \circ \sim p)$$

$$8.12 \quad \sim p = \sim [p \sim (\sim p)] = p \circ \sim p$$

$$8.13 \quad \sim p = \sim p \sim p = \sim (\sim p \circ p)$$

$$8.14 \quad p = \sim (\sim p \sim p) = \sim p \circ p$$

فإذا وضعنا العلاقات الدقيقة \circ ، \rightarrow بدلًا من العلاقات المادية الحاصل

الضرب المنطقي والتضمن المادي في التكافؤات السابقة، فإن التمييزات بين: ممكناً، صادقاً، ضروري، وبين مستحيل الكذب، ممكناً الكذب، يمكن استبعادها، ويصبح المطلق بذلك منطقاً ثانياً للقيم. وحقاً يوضح لويس التصورات: يمكن، مستحيل، ضروري، فإنه يدخل التمييز بين المعنى النسبي Relative والمعنى absolute لهذه الجهات. والمعنى النسبي - كما يستخدمه لويس - يشير إلى العلاقة بين القضية الملائمة وبين حالة الواقع المعينة مثل، المعلومات الأولية، معرفتنا عن الواقعة الملائمة للحظة معيينة، وهكذا. ومن هذا المطلق فإن المصطلح «ممكناً» عند لويس يعني الاتساق مع حالة الأشياء الملائمة. أما المصطلح «مستحيل»، فيعني الالاتساق مع حالة الواقع. والمصطلح «ضروري»، يعني ما تتضمنه حالة الأشياء القائمة. ومن جهة أخرى فإن المعنى المطلق يشير إلى القضية، وعلاقتها الذاتية وعلاقتها بتنفيذها. ومثل هذه العلاقة تنتج من التحليل المنطقي للقضية الملائمة. ومن ثم فالمعنى الملائم للإمكانية يصبح أوسع من المعنى المطلق بل ويتضمنه.

يعالج لويس الجهات في معناها المطلق ويؤسس علاقات الجهة الآتية:

18.4	$p \rightarrow o p$	الصدق يتضمن الإمكانية
18.14	$\sim o p \rightarrow \sim p$	الاستحالة تتضمن الكذب
18.42	$\sim o \sim p \rightarrow o p$	الضرورة تتضمن الكذب
18.5	$p \rightarrow q, \sim o \rightarrow \sim q \sim o p$	

«إذا لم يكن التالي ممكناً، إذن فالقديم مستحيل أيضاً».

18.52 $p \rightarrow q, o \sim q \rightarrow o \sim p$

«إذا كان التالي ممكناً الكذب، إذن فالقديم ممكناً الكذب أيضاً».

تطویر نسق الموجهات عند لویس وحجه بیکر

اعتبرت أفكار لويس فيها يتعلق بنسب قضايا الموجهات من الإسهامات الجديدة والدقيقة في المنطق الرياضي المعاصر . ولكن بيكر Becker أنس حجة عن نسب لويس للموجهات ، يبدأ فيها بالإشارة إلى أن لويس كان معانيا بالحديث عن ست جهات فحسب هي : صادق - كاذب - ممكן - مستحيل ممكناً الكذب - ضروري . مع الوضع في الاعتبار المجهات التالية ممثلة في النسب ٥ ~ ٥ ~ التي ذكرها لويس في منطقة عام ١٩٣٢ والتي تعني أنه من الضرورة أنه مستحيل . لقد برهن ماكينزي Mackinsey في مقالة له بعنوان «برهان على أنه توجد موجهات متعددة في نسب لويس » على أنه في النسب s_1 وفي النسب s_2 أيضاً يوجد عدد لا نهائي من هذه الموجهات المركبة غير القابلة للرد . ولقد أوضح ماكينزي أيضاً كل الموجهات من النوع $\dots 000$ أو 000 غير قابلة للرد ومن ثم فإن الموجهات عن طريق التأليفات تنبع إلى موجهات جديدة غير قابلة للرد ، وهذا يعني أن نسب لويس نسقاً مفتوحاً .

يرى بيكر أنه إذا أضيفت المسلاة ٨ إلى المسلاط ١١-١١.٧ في نسب لويس فإنه يتبع .

لكن بيكر يحاول تطوير رمزية لويس إلى رمزية أفضل بحيث يقضي على بعض الصعوبات التي يمكن أن تتعرض البرهنة على القضايا. ولذا فإنه يستخدم الرمز \models ليعني به «أنه من الضروري».

$$g \circ p = \sim \diamond \sim p$$

القضية : « ضرورة ، تعني » من الكاذب أنه ممكن أن تكون « كاذبة » .
« من المستحيل أن تكون » كاذبة » .

ويبدأ بيكر في وضع بديهيات النسق بصورة جديدة حيث .

$$\square \circ \square \square p$$

أي «الضرورة تتضمن ضرورة الضرورة» . وهذه البديهية تسمح باختزال الجهات كما يلي :

$$\square^n p \square p$$

$$\diamond^n p = \diamond p$$

ويتتج عن ذلك أن

$$p \rightarrow p \rightarrow \square p \rightarrow \square q$$

$$\square p \rightarrow \square \diamond \square p$$

$$\diamond \square \diamond p \rightarrow \square p$$

$$(\square \diamond)^n p = \square \diamond p$$

$$(\diamond \square)^n p = \diamond \square p$$

$$(\square \diamond)^n p = \square \diamond p$$

$$(\diamond \square)^n p = \diamond \square p$$

وباستخدام المبرهنات السابقة فإن كل الموجهات المركبة يمكن اختزالها في ١٤ موجهة أساسية . فعل سبيل المثال عندما تكون الموجهة من خط النفي البسيط ~ ، فإنه إذا طبقنا قاعدة النفي المزدوج على اعتبار أنها ضرورية فإن القضية p تنتج (إذا كان عدد علامة النفي ~ صحيح) .

$$(\sim)^{2^m} p = p$$

أو أن نفي \sim (إذا كان عدد علامات النفي شاداً)

$$(\sim)^{2n+1} p = (\sim)^{2n} p = \sim p$$

وهكذا فإن الموجهات غير التامة تختزل إلى موجهتين أساستين: الصدق p ، الكذب $\sim p$. وتكون الموجهات تامة Proper عندما يظهر الرمز \square أو الرمز \diamond فعلاً . وعلى أساس النظريات المؤسسة نحصل على الموجهات المثبتة غير قابلة للاختزال كما يلي:

$$\begin{array}{c} \square \diamond \square , \quad \square \diamond , \\ \diamond \square \diamond , \quad \diamond \square \end{array}$$

ومن السهولة يمكن أن نلاحظ أن الموجهة السلبية تناظر موجهة مثبتة ، إذا أضيفت علامة النفي في النهاية . ومن ثم يوجد لدينا $3 + 3$ مثبتة ، $3 + 2$ منافية ، 2 موجهة غير تامة ، ويصبح العدد الإجمالي لهذه الموجهات 14 موجهة أساسية غير قابلة للرد أو الاختزال ، وبالتالي يوجد عدد من التضمينات الدقيقة بين التضمينات الست المثبتة ، خاصة :

$$\begin{array}{ccccccccc} \square p \rightarrow \square \diamond \square p \rightarrow \diamond \square p \rightarrow \diamond \square \diamond p \\ 3 \diamond p \\ \square p \rightarrow \square \diamond \square p \rightarrow \square \diamond p \rightarrow \diamond \square \diamond p \\ \square \diamond p \end{array}$$

ويكن استخدام السهم \rightarrow بدلًا من العلامة $|$. وبالتالي يمكن كتابة العلامات السابقة على هذا النحو :

$$\begin{array}{ccccc} \square p \rightarrow \square \diamond \square p & | & \diamond \square p & \rightarrow & \square \diamond p \\ & | & & & | \\ & \rightarrow & & & \leftarrow \end{array}$$

تلك هي التضمنات الأساسية، وقد برهن W.T. Parry على أنه لا توجد تضمنات أخرى. لكننا إذا ما مفينا في دراسة الموجهات في نسق لويس، فسوف يتضح لنا أن يذكر Oskar Becker يضيف مسلمة أخرى للنسق، s هي:

$$\diamond \circ \square \diamond \circ \circ$$

وينتقل من هذا إلى تعريف النسق، s الذي تقبل فيه الموجهات الرد إلى ٦ موجهات فقط هي:

- أ - موجهتين غير تامتين [\diamond صادقة، \circ ~ كاذبة].
- ب - أربع موجهات تامة، اثنان منها مثبتتان (صادق بالضرورة \square) ، مكنة الصدق \diamond) واثنان سالبتان (كاذب بالضرورة أو مستحيل \diamond ~ \square ، مكن الكذب \circ ~ \diamond).

الفصل الثاني

لو كاشيفتش والمنطق متعدد القيم

أ لهم آل المنطق البولندي «يان لو كاشيفتش»^(١) Jan Lukasiewicz في إثراه الدراسات المنطقية المعاصرة، فصحح وعدل، وحذف وأضاف، وطور

(١) لخص الدكتور تشلاف ليفסקי Czeslaw Lejewski حياة يان لو كاشيفتش والأراء المنطقية المأمة التي قدمها ومدرسه في المقدمة التي كتبها للطبعة العربية التي جاءت ترجمة لكتاب نظرية القياس الأرسطية، والتي قام بها الدكتور عبد الحميد سبره. حيث يقول: «ولد يان لو كاشيفتش في لغوف سنة ١٨٧٨. ودرس في الجمنازيوم الفلولوجي هناك، حيث تلقى معرفة مبتهلة باللاتينية واليونانية. فكان باستطاعته حتى بلوغه العشرين أن يلقي عن ظهر قلب أشعاراً من هوراس وفقرات من هوميروس. وفي سنة ١٨٩٧ انتظم في جامعة لغوف لدراسة الرياضيات والفلسفة، وبعد أن أتم برنامجاً دراسياً تحت إشراف الأستاذ تشاردوفסקי Twardowski حصل على شهادة الدكتوراه في الفلسفة سنة ١٩٠٢. وعاد إلى لغوف سنة ١٩٠٦ حيث عين معاضاً في الفلسفة وما يجدر ملاحظته أن سلسلة محاضراته الأولى كان موضوعها «غير المنطق»، وظل يقوم بالتدريس في جامعة لغوف حتى بداية الحرب العالمية الأولى، وفي سنة ١٩١٥ انتقل إلى وارسو ليحاضر في الفلسفة في جامعتها ثم ترك الجامعة عام ١٩١٨ ليشغل وظيفة عالمة في وزارة التربية البولندية، وفي سنة ١٩١٩ كان وزيراً للتربية في حكومة باديرفسكي، وفي نهاية ذلك العام استأنف حياته الأكademie فكان حتى سبتمبر ١٩٣١ أستاذاً للفلسفة في جامعة وارسو - وفي خلال هذه المدة دعي لشغل وظيفة مدير للجامعة مرتين الأولى ١٩٢٢ - ١٩٢٣، والثانية عام ١٩٣١ - ١٩٣٢.

وفي الأيام الأولى من الحرب العالمية الثانية دمرت شقة لو كاشيفتش في غارة جوية. - وأثنى الحريق الذي نشب في أثر ذلك على مكتبه كلها - وفيها ملائكة المخترطة ومذكرة الله ...

المفاهيم والمصطلحات ، وأخذ بيد الدراسات المعاصرة في المنطق الرياضي وزودها بدفعات قوية حفزت المناطقة من بعده ، أو على الأقل جيل تلامذته من المدرسة البولندية ، إلى تطوير أبحاث المنطق بما يتلائم مع طبيعة الدراسة في هذا العلم .

ومن أهم الابحاث التي أثراها لو كاشيفتش « تلك الخاصة بتصور الجهة في

كان لو كاشيفتش أقدم تلامذة كاتسيميرس تفاردوفسكي (١٨٦٦ - ١٩٣٨) الذي تلقى دراسه الفلسفية على فرانز بربنانتو Franz Brentano في فيينا ... وكان اهتمام تفاردوفسكي في الفلسفة منصبًا على تحليل المعاني . فكان يgren تلامذته على التفكير الواضح ، ولكنه لم يدعهم ينسون أن تحليل المعاني ليس غاية في ذاته وإنما هو مدخل إلى الفلسفة .
ونحن نجد أيضًا صفاتي الدقة والاحكام اللتين تستلزمها هذه الطريقة في أول بحوث لو كاشيفتش العامة وهو البحث الرسوم « في مبدأ التناقض عند أرسطو » ، نشر هذا البحث بالبولندية سنة ١٩١٠ ... وفي هذا الكتاب بين لو كاشيفتش أن عند أرسطو ثلاثة صيغ مختلفة لمبدأ التناقض ، الصيغة الأولى أنطولوجية أو وجودية . والثانية منطقية والثالثة سبكلولوجية ... وينادى لو كاشيفتش من الناظر في الصيغة الأنطولوجية للصدأ إلى مناقشة مسألة الحالات التي كان اكتشافها بمثابة صدقة للمشتغلين بالفلسفة والرياضيات في ذلك الوقت ...

ولا شك في أن لو كاشيفتش قد استوحى تصوره للمنطق الثلاثي القيم من معالجة أرسطو للحوادث الممكنة المستقبلة في كتاب « المبارزة » ، وأما الاعتبارات لتصوريه كذلك التي أدت بالمنطقى E.L.POISI بعد ذلك بأربع سنوات إلى نتائج مشابهة ، فلم يكن لها إلا دور ثانوي في تفكير لو كاشيفتش . وكان لو كاشيفتش يرمي من إنشاء نسق منطقى ثلاثي القيم إلى صياغة نظرية تحسوي القوانين التقليدية في المنطق الموجه . وقد حاول أيضًا إنشاء ذلك النسق أن يتغلب على مذهب الخاتمة الفلسفى ، وهو مذهب كان يعتقد أنه لازم عند التسلم بمبدأ ثانية القيم ولكنه عدل فيها بعد عن اعتقاده ذاك ، فلم يجد يرى مانعًا بين انتفاء الخاتمة والمنطق الثنائي القيم . وبعد إنشاء النسق المنطقى الثلاثي القيم صار من الواضح أنه يمكن إنشاء نسق رباعي القيم أو خاتمي القيم أو نسق عدد القيم فيه أي عدد ثناه ، بل نسق يحسوي ما لا نهاية له من القيم .

راجع نظريةقياس الارسطية ، ترجمة عبد الحميد صبره ، المقدمة من ص ٤٠ - ص

المنطق، فقد تابعها عن كثب وحاول ما وسعه الجهد أن يقدم الحساب المتعطفي المتكامل لما نسميه الآن «المنطق متعدد القيم» *many-valued logic* وفي تحليل لو كاشيفتش للموجهات نلتقي بالأفكار الابتدائية الآتية: ^(١)

- ١ - **p قضية** ويرمز لها بالرمز **p**
- ٢ - **p قضية كاذبة** ويرمز لها بالرمز **Np** أي **(non - p)**
- ٣ - **p قضية ممكنة** ويرمز لها بالرمز **Mp** (ويلاحظ أن الحرف **M** في رمزية **Moglich** لو كاشيفتش مأخوذ من الكلمة الألمانية **possible** التي تعني **(possible)**).
- ٤ - **p ليست ممكنة** ويرمز لها بالرمز **NMp**
- ٥ - **(non - p) ممكنة** ويرمز لها بالرمز **MNp**
- ٦ - **(non - p) ليست ممكنة** ويرمز لها بالرمز **NMNp**

كذلك فإن لو كاشيفتش يحاول أن يحدد التضمن بدقة، ويستخدم الرمز **C** الذي يشير إلى التضمن ليميز فكرته عن فكرة **R** وفكرة **L** أيضاً. فالعبارة **«p Impiles q»** التي نلتقي بها في منطق **R** تكتب في رمزية **لو كاشيفتش بالصورة:**

$$C \ p \ q$$

وتعني إذا كانت **p صادقة إذن q صادقة أيضاً**

$$C \ p \ q: \text{“If } p \text{ then } q\text{”}$$

(١) أثرت أن أقدم الرمزية التي يستخدمها لو كاشيفتش في منطقه كما هي لأن تعريبها كما هو معروض في ترجمة عبد الحميد صبره يزدعي بالقاريء إلى الواقع لي خطأ تكرار بعض المزوف المستخدمة.

ويطلق لو كاشيفتش على الرموز M, N, C في رمزيته مصطلح روابط

. «Functors»

والواقع أن لو كاشيفتش استطاع أن يستمد أفكاره الجديدة من بعض القضايا المأمة التي عثر عليها في المنطق الكلاسيكي وهي :

القضية الأولى تكون النتيجة صحيحة حينما تنتقل من الوجود الضروري إلى الوجود .

القضية الثانية تكون النتيجة صحيحة حينما تنتقل من الوجود إلى الوجود الممكن .

القضية الثالثة من المستحيل إلى الالا وجود فإن النتيجة صحيحة (إذا كانت p ليست ممكنة إذن $p - non$).

القضية الرابعة إذا وجد شيء ما فان وجوده يكون ضرورياً (وهذه القضية وجدتها كوكاشيفتش عند ليينتر الذي اكتشف أنه أخذها عن أسطو من كتابه De Interpretatione .

القضية الخامسة إذا افترضت $p - non$ إذن p ليست ممكنة .

القضية السادسة بالنسبة لأي قضية p فإنه إما p أو $p - non$ ممكنة .

لقد أشار لو كاشيفتش إلى القضيتين الموجهتين الأولتين بالصورة الرمزية الآتية

$$1. C \rightarrow Mp \rightarrow Np \quad \text{«} NMp \text{ implies } Np \text{»}$$

$$2. C \rightarrow p \rightarrow N \rightarrow Mp \quad \text{«} N \rightarrow p \text{ implies } N \rightarrow Mp \text{»}$$

وحق يمكن اشتقاق قضايا أخرى من الصياغات فإن لو كاشيفتش يستخدم مثل رسّل قاعدتين للاستنباط هما : (1) قاعدة التعمير

(٢) إثبات التالي **Modus ponens** ويطلق عليهما معاً قاعدة **Substitution detachment**. كذلك نجد أن لو كاشيفتش يطلق على القضية الصادقة المصطلح مقررة 'thesis'، وهو يقبل أربعة قضایا أخرى صادقة بخلاف القضایین السابقتین، وبذا يصبح تبیون القضایا الصادقة في نسخه ٦ قضایا، وهذه القضایا تعد بمثابة المقررات^(١) theses الأساسية لنسخة، وهي كما يلي:

المقررات

CNMPNP - ١

CNpNMP - ٢

CCNqNpCpq - ٣

CCNpqCNqp - ٤

CCpNqCqNp - ٥

CCpqCCqrCpr - ٦

وفي هذه المقررات نلاحظ أن ١، ٢، ٣ هي القضایان السابقتان، وأن المقررات ٤، ٥ هي صور مختلفة لمبدأ التقلیل Principle of transposition . أما المقررة السادسة فهي تمثل القياس الشرطي hypothetical Syllogisan

(١) الترجمة مقرر مأخوذه عن عبد الحميد صبره، فيقول: وكل قضية من قضایا النتیج أو النظریة فتحن مقرر صدقها، أما المسلمات فتقرر صدقها على سبیل التسلیم، وأما البرهانات فتقرر صدقها باعتبارها لازمة عن المسلمات، لذلك يطلق على كل قضية صادقة في النظریة أو النتیج كله کلمة مقررة thesis ، والمقررات إذن تشمل المسلمات والبرهانات فکل المسلمات والبرهانات مقررات، لكن المقررات بعضها مسلمات وبعضها الآخر برهانات.

راجع مقدمة عبد الحميد صبره لنظرية القياس الارسطية، ص ٢٦ - ٢٧.

ولكن كيف يمكن إجراء البرهنة عند لو كاشيفتش؟

خذ المثال الآتي عن كيفية البرهنة

$$3 \text{ p} / \text{Mp} \times \text{C I - 7}$$

يعني هذا المثال أنه في المقررة ٣ نرفع p ونضع بدلاً منها Mp ، فنحصل على التضمن، وأن المقررة (١) تتضمن المقررة (٧)، وما دامت المقررة (١) صادقة فإن المقررة (٧) يمكن الحصول عليها وفقاً لمبدأ إثبات التالي.
وإذا تقدمنا بمثل هذه الطريقة أمكن أن نحصل على المقررات الآتية:

$$\text{CpMp} = ٧$$

$$\text{CNpMNP} = ٨$$

$$\text{CNMNpp} = ٩$$

$$\text{CNMNpMp} = ١٠$$

$$\text{CNMpMNP} = ١١$$

$$\text{CMPP} = ١٢$$

$$\text{NPNP} = ١٣$$

$$\text{NMNP} = ١٤$$

$$\text{MPNMNP} = ١٥$$

$$\text{CMNPNMP} = ١٦$$

لكنا نلاحظ أن المقررات السابقة تنطوي على بعض النتائج المخالفة،
مثال ذلك المقررة ٧، المقررة . ١٢

$$(\text{p} \text{ تتضمن إمكانية } \text{p}) \quad \text{CpMp} = ٧$$

$$(\text{إمكانية } \text{p} \text{ تتضمن } \text{p}) \quad \text{CMpp} = ١٢$$

وهذا التضمن يعني أن في المتعلق الثاني القيم فإن التعبيرين p ، Mp متكافئان، ووفقاً لهذا فإن.

'to be possible'

Mp

تكافئه.

'to be true'

p

والأبعد من هذا أن يان لو كاشيفتش يجد بعض النتائج المخالفة الأخرى حينما يحمل النتائج التي يحصل عليها من القضية المرجحة الثالثة. وحق يعبر عن هذا فسانه يلجمـا إلى استخدام السور الذي يشير إلى التعميم Σ **Generalization** \sqcup وال سور الذي يشير إلى التعميم **Particularization** (والرمز أخذها لو كاشيفتش من تشارلز بيرس المنطقي الأمريكي).

Σp = 'For a certain p '

Πp = 'For all P '

ومن ثم فالقضية الثالثة يمكن التعبير عنها فقط باستخدام هذه الأسوار. ولكن لو كاشيفتش يضيف رمزاً آخرأ لعلامة الوصل **Conjunction** وهو الرمز K .

' Kpq ' = ' p and q '

وبهذه الصورة يمكن كتابة المقررة الثالثة في صورة رمزية كما يلي:

$\Sigma . pKMpMNP$ - ١٧

وتقرأ هذه الصيغة كما يلي:

«بالنسبة لقضية معينة p ، إما p أو non- p مكتنان»

وي باستخدام سور التعميم Σ في المقررة ١٧ فإنها تصبح:

ونقرأ كما يلي:

ليس من الصادق أنه بالنسبة لأي قضية p أن يكون كاذباً أن p ممكنة ونكون $\neg p$ بدورها ممكنة.

وبتطبيق قواعد الاستباط السابقة فإن لو كاشيفتش يزرس المقررات الآتية بالتتابع:

. C C p q . C N q N p - ٢٠

C N M q k M p M N p - ٢١

C N M q P p N K M p N p - ٢٢

. M p - ٢٣

ونحن نلاحظ أن المقررة (٢٣) تعني أن $\neg p$ ممكنة، على اعتبار أن $\neg p$ أي قضية اختيارت بصورة عشوائية. وهكذا فإننا إذا بدأنا من القضية الثالثة فإننا نتوصل إلى النتيجة الثالثة بأن $\neg p$ كل شيء ممكن، وأن لا شيء مستحيل، وبالتالي فإنه لا شيء ضروري. وما هو أبعد من هذا أنه إذا اتحدت المقررة (١٢) مع المقررة (٢٣) فسوف تنتج لدينا مقررة جديدة هي (٢٤)، حيث:

. C M p p - ١٢

M p - ٢٣

p - ٢٤

ومذه المقررة الأخيرة تعنى أن أي قضية p هي صادقة.

لوكاشيفتش والمنطق ثلاثي القيمة

لقد سبق ان أشرنا ، ونحن بقصد الحديث عن بدايات منطق الموجهات ، أن المنطق التقليدي ثنائي القيم ، أي أنه ينسب للقضية قيمة صدق وقيمة كذب فقط . وقد نشأ هذا الوضع من طبيعة مبدأ الثالث المرفوع ذاته ، الذي يقرر أن القضية إما صادقة أو كاذبة ، وهذا المبدأ يعتبر أساسياً للمنطق الكلاسيكي بأسره ، ولكن هناك قضايا أخرى مثل ، من الممكن أن تكون في القاهرة يوم ٣٠ يناير . أمثال هذه القضية لا يمكن القول بأنها ضرورية أو صادقة أو كاذبة ، في الوقت الذي تم تقريرها فيه (لأن هذه القضايا عند أرسطيو تدخل في باب المستقبل الحادث) . ولذلك فإن لوكاشيفتش يقدم قيمة ثالثة لمثل هذه القضية وهي القيمة ممكناً 'Possible' وبناء على هذه الفكرة فإننا إذا رمزنا للمصطلح صادق بالرمز ١ وللمصطلح كاذب بالرمز ٠ ، فإن لوكاشيفتش يعطي القيمة $\frac{1}{2}$ للمصطلح ممكناً . كذلك فهو يرمي للسلب Negation (الرابط Functor) بالرمز N ، ويضع القائمة الآتية التي توضح قيم القضية ونفيها .

P	0	$\frac{1}{2}$	1
	1	$\frac{1}{2}$	0
N P	1	$\frac{1}{2}$	0
	0	$\frac{1}{2}$	1

الواضح من هذه القائمة أن الاختلاف الوحيد بين هذا المنطق والمنطق ثنائي القيم هو أن $N P$ ، $M P$ يمكن أن تأخذ القيمة $\frac{1}{2}$. والقيم الأخرى هي قيم متاظرة تماماً كما في المنطق ثنائي القيم .

أما في حالة التضمين C فإنه يمكن تأسيس القائمة بصورة عما تألف لكي تناظر القيم الثنائية على النحو التالي :

C	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

لقد حاول لو كاشيفتش^(١) أن يعثر على تعريف دقيق لتصور الإمكانية قبل عام ١٩٢٠ ، ولكن ألفرد تارسكي وهو من أربع تلامذته أمكنه أن يقدم مثل هذا التعريف عام ١٩٢٠ حيث يعرف الإمكانية :

D₂

$$M \cdot p = C \cdot N \cdot p \cdot p$$

أي أن « p » ممكنة ، تعرف « إذن non-p إذن p ». .

والتعبير 'CN pp' الذي يحدد إمكانية قضية ما p يكون كاذباً فقط عندما تكون p ذاتها كاذبة ، وفي كل الحالات الأخرى فإن هذا التعبير صادق. ووفقاً لهذا فإن .

$$M_0 = 0 \quad , \quad M_{1/2} = 1 \quad , \quad M_1 = 1$$

وعلينا أن نلاحظ أنه في الحساب الثنائي القيم فإن التعبير 'CNpp' مكافئ لـ 'p' ، ولكن هذا لا ينطبق في حالة الحساب ثلاثي القيم - Three

(١) نلاحظ أن لو كاشيفتش في بداية أعماله تبني تعريف الإمكانية البسيطة وفقاً للصيغة :

$$D_1 \cdot M \cdot p = A \cdot E \cdot p \cdot N \cdot p \cdot I \cdot q \cdot N \cdot p \cdot k \cdot p \cdot N \cdot q$$

حيث الرابط A يعني الفصل المنطقي ، بينما E تشير إلى التكافؤ المنطقي. ويكون قراءة الصيغة كما يلي :

« ممكنة ، تعني إمام أو p متكافئان أو أنه لا يوجد أي زوج من القضايا المتنافضة من p . ولكن لو كاشيفتش امتنع عن استخدام هذا التعريف بعد أن قام تارسكي بتعريفه .

(حيث توجد ثلاثة قيم هي $0, 1/2, 1$) حيث تكون الحالة $1 = M$. وعلى هذا فإن المقررة ثنائية القيم 'CCNppp' ليست صحيحة في الحساب ثلاثي القيم إذا كانت قيمة p هي $1/2$.

كذلك فإن لو كاشيفتش يعرف الضرورة كما يلي:

$$D_1: N \cdot M \cdot Np = N \cdot Cp \cdot Np$$

أي أن:

، 'p ضرورية' ، تعني ، أنه ليس من الصادق أن p إذن p ، non- p ، .

وعلى أساس تصور الإمكانية الذي قدمه لو كاشيفتش فإن قضايا الموجهات السابق وصفها هي قضايا صادقة ومتسقة. وحتى نبرهن على أن صيغة معينة هي تحصيل حاصل (مقررة) فإن لو كاشيفتش يستخدم طريقة القائمة بالإضافة إلى التعويض وقاعدة إثبات التالي. على سبيل المثال لكي نبرهن على الصيغة $Cp Mp$ ، إذا p صادقة إذن p ممكنة ، نصمم القائمة ونضع في اعتبارنا القيم المتتاظرة للتضمن والإمكانية.

P	Mp	$CpMp$
0	0	1
$1/2$	1	1
1	1	1

الصيغة $CpMp$ هي تحصيل حاصل لأنها دائمًا تأخذ القيمة 1.

بناء على كل هذه الأفكار فإنه يمكن لنا أن نعرض النسق الذي يقدمه لو كاشيفتش للمنطق ثلاثي القيمة بصورة متسقة بحيث تتفق على أهم مبادئ وأفكاره الأساسية.

التركيب الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم.
يتالف البناء الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم عند لوكاشيفتش من
أربعة أجزاء أساسية هي:

أولاً: الأفكار الابتدائية.

١ - المتغيرات القضائية p, q, r, \dots وكل منها يأخذ ثلاثة قيم هي
صادق، كاذب، ممكن T, F, M وهذه القيم عددياً هي $1, 0, \frac{1}{2}$ على
التوالي.

٢ - رابط التضمن **Functor of Implication** ويرمز له بالرمز C .

٣ - تصور الإمكانية ويعرف كما يلي:

$$D_1: MP = CNPP$$

ثانياً: الأفكار المعرفة **Defined Ideas**.

توجد روابط أخرى تعرف كما يلي:

٤ - الفصل المنطقي ويرمز له بالرمز A ويعرف كما يلي:

$$D_4: Apq = CCPqq$$

٥ - الوصل المنطقي ويرمز له بالرمز K ويعرف كما يلي:

$$D_5: Kpq = NANpNq$$

٦ - التكافؤ المنطقي E ويعرف كما يلي:

$$D_6: Epq = KCpqCqp$$

ثالثاً: البدائيات

توجد لدينا في النسق أربع بدائيات أساسية هي:

CqCpq - ١

CCpqCCq Cpr - ٢

CCCpNppp - ٣

CCNqNpCpq - ٤

وقوائم الصدق الخاصة بهذه البدائيات تبين أن هذه البدائيات صادقة أو تحصيل حاصل إذا أخذت المتغيرات القيم ٠، ١. على التوالي.

الفصل الثالث

هلبرت والصورية البحتة

حاول دافيد هلبرت تصييل الصورية في المنطق الرياضي من خلال كتاباته^(١) التي دونها ، وأراد مثل فريجيه ورسّل أن يُؤسِّس ويُدعم أنسَ**الرياضيات Foundations of Mathematics** عن طريق المنطق الرياضي ،

(١) من أهم كتابات هلبرت ما يلي :

- **Mathematische Probleme (Mathematical problems, congress of Mathematics, Paris, 1900).**
- **Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, On the Foundations of logic and Arithmetic, International Congress of Mathematics, Heidelberg, 1904).**
- **Axiomatische Denken (Axiomatic thinking, Mathematische Annalen, 1918).**
- **Die Grundlagen der Mathematik, Hamburg, 1928.**
- **Beweis des Tertium non datur (The demonstration of Excluded Middle, Göttingen, 1931).**
- **Naturerkennen und Logik (Knowledge of Nature and logic, Göttingen, 1931).**

وكتب مع أckerمان Ackermann مولنا بالألمانية بعنوان **Grundzüge der theoretischen Logik** Principles of Mathematical logic عام ١٩٥٠ بمتران Bernays كتاب (أنس الرياضيات) كذا صدر له بالاشراك مع برنارز Bernays كتاب (أنس الرياضيات) **Grundlagen der Mathematik** الأول منه صدر عام ١٩٣٤ وصدر الجزء الثاني عام ١٩٣٨ . ومن أهم مقالات هلبرت الأخرى (أنس المندسة) **Grundlagen der Geometrie** الذي صدر عام ١٨٩٩ ، وترجم إلى الإنجليزية عام ١٩٠٢ بعنوان **The Foundations of Geometry** كما ترجم إلى اللغة الفرنسية أيضاً .

وهو ما أسماء المنطق النظري Theoretical logic أو الرياضي أحياناً. ونقطة البدء عند هليبرت كما يلي: ليس مقصوداً بالمنطق أن يدرس موضوعات معينة، تماماً كما تفعل أي نظرية رياضية، ولكن المقصود به أن يدرس القضايا التي يمكن تدوينها عن هذه الموضوعات. وبكلمات أخرى فإن اللغة التي تستخدمها في النظرية الرياضية شيئاً قائماً بذاتها، واللغة التي تستخدمها حين نتكلم عن هذه النظرية شيء آخر.

معنى هذا أن هليبرت ينظر للغة الرياضة كشيء مستقل ويردها إلى عناصرها حتى يمكن دراستها كلغة رياضية في حد ذاتها. وهذه الفكرة هي ما يطلق عليه هليبرت مصطلح، ما وراء الرياضيات، Meta-mathematics، وأحياناً، ما وراء المنطق، Metalogic. من أجل هذا المدف شعر هليبرت بال الحاجة إلى لغة دقيقة هي لغة المنطق الرياضي التي وجدتها بصورة سلسة في برنكبيبا، وكل ما كان ينبغي عليه أن يفعله يتمثل في تبسيط هذه اللغة بصورة أكثر وتوسيعها لتفادي بأغراض البرنامج الذي يدعو إليه. ووفقاً لهذا فإن على المنطق في نظره أن يؤلف بين الرموز البحتة، وأن يضع هذه التأليفات تحت منظار الاستدلال دون أن يفكر فيها تعنيه، ودون أن يضفي الفكر عليها. وهنا فإن هليبرت ينظر للمنطق على أنه منطق قواعد Rules معينة، أو هو منطق علاقات، أو كما قال هو ذاته إن للرموز ناحيتين هما، (١) أنها تستخدم في القواعد الصورية Formal Rules، (٢) أنها بلا معنى ولها القدرة على الحركة.

ويرى هليبرت أن أي نظرية رياضية يمكن صياغتها بطريقة صورية تماماً، وأن الرياضيات متحركة تماماً من أي افتراضات قبلية. وحقّ يمكن أن نؤسس الرياضيات فإننا لسنا بحاجة إلى معاونة إلهية على ما يرى كروننكر^(١)

(١) كروننcker من دعاة المذهب المدعى في أنس الرياضيات، وهو معاصر لغيرشتاين -

Kronecker، أو أي افتراض للذكاء الإنساني خاص كما يدعى هنري بوانكاريه Poincaré، أو أي حدس أولي كما يدعى بروور Brouwer، أو حتى بديهيات قابلة للرد كما يرى رسيل وهو ابتهد. إن هليرت يعتقد في إمكانية إنجاز أنسس الرياضيات بدون كل هذه الفروض إذا نظرنا للرياضية البحتة من وجهة نظر صورية خالصة، والطريقة الوحيدة التي يمكن بواسطتها إنجاز هذا العمل هي الطريقة الاكتسيوماتيكية التي اتضحت في أبحاث هليرت منذ حوالي عام

وكان زميلاً له في جامعة برلين. وأراه كروننكر يمكن إيجازها فلما يلي:
 ١ - أن كروننكر يعرض على التحسس الزائد لدى بعض الرياضيين لتأسيس
 الرياضيات على أساس بعض المفاهيم مثل المجموعة المئوية Finite set والأعداد الحقيقة
 Real Numbers بناء على نكارة اللامتناهية Infinite. ومن أنه يرى أن مدخل التحسيب
 Arithmetization يتصل بالتحسيب تستبعد استخدام المجموعات اللامتناهية من التعرفات والأعداد، وفي
 هذا نجد يقول «لقد خلق الله الأعداد الصحيحة، ولكن ما عدا ذلك فهو من صنع عمل
 الإنسان».

راجح في ذلك:

Bell, E.T., The Queen of the Sciences, Baltimore, Williams and Wilkins,
1931, p. 34.

ب - يقرر كرونكر أن الأعداد الطبيعية والعمليات التي تقوم بينها إنما يمكن تأسيسها حديساً، وأن الأعداد الجبرية والعمليات التي تقوم بينها يمكن تأسيسها من خلال الأعداد الطبيعية وعملياتها، لكن الأعداد الحقيقة ليست قابلة لمثل هذا التأسيس، ولهذا السبب نجد أنه ينكر نظرية كانтор Cantor باعتبارها ليست نوحاً من الرياضيات وإنما هي فقط صورة من صور التصور Mysticism . راجع في ذلك:

Struik, D.J., A Concise History of Mathematics. 2 Vols. New York,
Dover Pub. 1948. p. 243.

جـ - كل التعريفات والبراهين في العلم الرياضي يجب أن تكون ترتكيبية . Constructive

د - أن الأحكام ذات الطبيعة المنطقية البعثة لا تغنى ضرورة إلى نظريات رياضية
مشروعة.

١٩٠٠، وهي تضع ذلك التمييز الدقيق بين التصورات الابتدائية المسموحة بها بدون أي تعرifications، وبين التصورات المشتقة عن طريق التعريفات، أي بين البديهيات والمبرهنات، وهي أيضاً طريقة تؤسس قواعد الاستنباط في نظره^(٢).

أما الطريقة الإكسيوماتيكية التي يدعو إليها هيلبرت فهي جهاز من الرموز، لا شيء فيه يوجد بصورة عرضية، وإنما كل شيء يسير وفق القواعد الصورية الدقيقة. و اختيار البديهيات Choice of Axioms في هذه الطريقة يخضع لثلاث اعتبارات أساسية هي:

أولاً : أن البديهيات يجب أن تكون مستقلة Independent ، أو بمعنى آخر لا ينبغي أن يكون من الممكن استنباط بديهية من أخرى، لأنه في هذه الحالة سيزيد عدد البديهيات ويطلب الأمر اختزاناً إلى أقل عدد ممكن.

ثانياً : لا بد أن يكون عدد البديهيات كافياً بحيث يسمح باستنباط المبرهنات Theorems من النظرية التي لدينا.

ثالثاً : يتمنى أن تكون البديهيات غير متناقضة، وهذا الشرط يعد من أهم الشروط على الإطلاق في أي نسق بديهي Axiomatized system ، وهو أيضاً أصعب الشروط.

إلا أنه يمكننا أن ننظر إلى الشرط الثالث على أنه الخاصية التي ينبغي أن يتم بها أي نسق استباقي أو إكسيوماتيكي على الإطلاق، على حين أن

(٢) راجع في ذلك :

a - Henkin, L., Suppes, P., and Tarski, A., The Axiomatic Method,
Amsterdam, North-Holland pub. Co., 1959.

b - Heijer, O., On The Theory of axiom-system, Analysis, vol. 3,
1935, pp. 1-11.

الشرط الأول وكذلك الشرط الثاني، عادة ما تنظر إليها على أنها بمنابع شروط اقتصادية **Economical** بالنسبة للنسق.

ويترتب على هذه الشروط الثلاثة، ظهور مشكلات نلات أساسية تواجه أي نسق إكسيوماتيكي وهذه المشكلات هي :

- ١ - أن على النسق الإكسيوماتيكي أن يبرهن على عدم تناقض بديهياته.
- ٢ - كذلك لا بد وأن يكشف لنا النسق عن استقلال البدويات.
- ٣ - وأن يبرهن على تمام **Completeness** البدويات.

وانطلاقاً من الحقيقة الفائلة بأن الرياضيات تحوي تصورات منطقية بحثة، وأن المنطق يحتوي على تصورات رياضية (مثل فكره العدد) فإنه لا يمكن تشيد المنطق بعزل عن الرياضيات، كما أن الرياضيات لا يمكن أن تنفصل عن المنطق؛ لذا كان من الضروري أن يتم تأسيس المنطق والرياضيات، منذ البداية، في طريقة هلبرت بالتوافي معًا، وهذا ما افترضه هلبرت، ويكتنف تلخيص طريقة هلبرت الإكسيوماتيكية التي اتبعتها المدرسة الصورية من بعده على النحو التالي :

(١) أن الرموز الأساسية في المنطق والرياضيات يمكن حصرها في رموز معاً :

أ - رمز السلب **Negation** ويرمز له هلبرت بالرمز —

ب - رمز التضمين **Implication** ويرمز له هلبرت بالرمز → .

(٢) أن كل التأليفات التي نتوصل إليها من الرموز التي نضعها في اعتبارنا ، ولما معنى في الرياضيات الكلاسيكية، يمكن تمييزها بدقة حين نطلق عليها المصطلح « صيغ » **Formulae** : والصيغة يكون لها معنى فحسب في

حالتين: حينما تكون صادقة صدقًا مطلقاً، وحينما تكون كاذبة كذباً مطلقاً وي يمكن أن تمثل حالتي الصدق والكذب بمثال من الرياضيات المألوفة. إذا قلت $1 + 1 = 2$ ، هذه صيغة ذات معنى لأنها صادقة، وكذلك الصيغة $1 + 1 = 1$ صيغة لها معنى أيضاً لأنها كاذبة، أما الصيغة التي ليست ذات معنى مثل $1 = 2$ فهي لا تمثل شيئاً، ومن ثم لا يمكن القول بأنها صادقة أو كاذبة.

(٣) أن الإجراء الذي نقوم به ويسمح بنجاح هذه الصيغة، وينظر الصيغة المبرهنة في الرياضيات الكلاسيكية، هو ما نسميه البرهان.

(٤) أن الصيغة التي تنظر اثباتات الرياضيات الكلاسيكية والتي يمكن تحقيقها في حدود المتاهي يمكن البرهنة عليها، أي يمكن تأسيسها - وفقط عندما يكون المساب الفعلى للإثبات الرياضية المنشورة ينبع من صدق الضيغ الملازمة.

و الواقع أن البرنامج الذي اقترحه هليرت على النحو السابق يتضمن منه أن النقاط الثلاث الأولى ترجع إلى رسول ومدرسته. أما النقطة الرابعة والتي تعني أنه من الممكن إبدال الرموز المنطقية برموز أخرى حسابية (عن طريق الأعداد الطبيعية) تفضي بنا إلى قضايا حسابية Arithmetical Proposition (ذات أعداد طبيعية) صادقة، ومن ثم فإنه إذا كانت قضية رمزية يمكن أن ترد إلى $1 + 2 = 1$ ، فإن هذا لا يمكن البرهنة عليه بذات الطريقة في ظل وجود النقطة الثالثة، وهذا يعني أنها غير قابلة للبرهان من خلال النسق وإطاره العام، أي البرهنة على عدم تناقض هذا النسق، لأن الأمر المام بالنسبة هليرت هو عدم التناقض.

ولكن يمكن لنا أن نقوم بإجراء بعض التصحیحات للنقطة الثالثة بالذات عند هليرت على الصورة التالية:

(٣) بعض الصيغ المعينة تسمى بديهيات.

(٢ ب) إذا كانت a, b . صيغتين (صادقتين أو كاذبتين) وكان في يتعلق بالقضية \vdash أن $\neg a$ أمكن البرهنة عليها ، إذن فإن $\neg b$ أيضاً قابلة للبرهان (قاعدة إثبات التالي) ولكن لتقرير ما إذا كان من الممكن البرهنة على صيغة معلقة لدينا ، منها كانت هذه الصيغة - بطريقة عامة ومحدودة - فإن هذه مشكلة أكثر تعقيداً ، وهي في حد ذاتها تزلف موضوع ما نسميه « مشكلة القرار » Problem of decision . أضف إلى هذا أنه توجد البديهيات التي نجد لها تطبيقاً في الرياضيات الكلاسيكية ، وبطبيعة الحال يوجد عدد لا نهائي من هذه الصيغة ، وكل صيغة يمكن أخذها كبديهية . كذلك فنحن إذا اعتبرنا أن كل رمز يمكن استبداله بعده ، فإنه يتبع عن ذلك أن هذه الصيغ يمكن تمثيلها بالعبارات $1 = 2, 1 = 3, 2 = 3, \dots$ وهي تحصيلات حاصل ، كما يرى فتجنثتين ، ويمكن الحصول عليها بالتعويض من عدد محدود من الصيغ . كذلك فإن مشكلة التناقض داخل النسق الرياضي الذي أراد هيلبرت تأسيسه يمكن أن ترد إلى المشكلة الآتية: إذا كان لدينا النسق الرياضي S وهو نسق متناقض ، فإنه سوف يتضمن برهاناً على الصيغة $1 = 2$ ، وهذا البرهان سوف يفضي إلى مجموعة متناهية من البديهيات ، التي يمكن أن نشير إليها بالرمز M وهذا سوف يعني بالضرورة أن المجموعة M متناقصة ، ومن ثم فإن مشكلة عدم التناقض الخاصة بالنسق ترد إلى مشكلة عدم تناقض بديهياته .

نظريّة حساب القضايا في نسق هيلبرت

تبدأ نظرية حساب القضايا عند هيلبرت - وفق مذهب الإكتيوبوماتيكي - متخذة مسار البرنكيبيا ولكن ياجراء بعض التعديلاتطفيفة على نسق البرنكيبيا كما يلي :

الأفكار الابتدائية Primitive Ideas

- ١ - x, y, z, \dots متغيرات قضائية Propositional Variables يمكن أن تأخذ قيمتين (صادق، كاذب)
- ٢ - الفصل: ويرمز له بالرمز \neg
- ٣ - الوصل: ويرمز له بالرمز $\&$
- ٤ - التضمن: ويرمز له بالرمز \rightarrow .
- ٥ - التكافؤ: ويرمز له بالرمز \sim
- ٦ - السلب: ويرمز له بالرمز \sim
- ٧ - أنه إذا كانت X قضية فإن $\neg X$ نفيها.

البدوييات

يضع نسق هلبرت البدوييات الأربع التالية والتي تعد بمثابة قضايا صادقة أو هي تحصيل حاصل وهي:

a - $X \vee X \rightarrow X$

b - $X \rightarrow X \vee X$

c - $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$

d - $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$

قواعد الاستبطاط

وتحصر في:

أ - قاعدة التعريف

ب - قاعدة الاستبطاط (إيات التالي)

ويمكن البرهنة على النظريات باستخدام الأفكار الابتدائية والقضايا الصادقة (البدويات) عن طريق تطبيق قواعد الاستباط. وهنا فإنه يتمنى علينا أن نناقش هليرت في نسقه.

أولاً : أن نظرية هليرت تبدأ من الأفكار الابتدائية وهي ذاتها الأفكار التي تبدأ منها نظرية رسول ، فيها عدا الرموز التي استحدثتها للمتغيرات ، فقد وضع هليرت الرموز X ، Y ، ... بدلاً من 5 ، 9 ، ... ، وكذلك رمز للوصل والتضمن والتكافؤ برموز جديدة ، ورمز لنفي القضية بعلامة (—) فوق المتغير ذاته .

ثانياً : أن البدويات التي حددتها هليرت تستخدم التضمن والفصل على حين أن بدويات رسول تستخدم فكرة السلب بالإضافة إلى التضمن والفصل .

ثالثاً : أن القواعد الأساسية للاستباط كما هي . لقد عدل هليرت في شكل الرمزية ، لكن لم يتمكن من إجراء تعديل على فكرة التضمن التي أودعها رسول وهو ابتهج البرنكيبيا ، وبذل فإن فكرة التضمن تتخل كما هي الفكرة المحورية حتى في نسق هليرت . لقد انصب التعديل إذن على الرمزية ولم يتجاوزها إلى النسق .

الفصل الرابع

كواين وحركة تصحيح المفاهيم

لم تكن حركة تصحيح مفاهيم المنطق الرياضي في تقدمها أقل من محاولات ابتكار أنساق منطقية على غرار نسق برنيكبيا؛ ولذا وجدنا قلة من المناطقة يتوجهون هذا الاتجاه، ومن بينهم، بل من أهمهم على الإطلاق كواين^(١) W.V.Quiine الذي حاول أن يصحح المفاهيم المنطقية والرياضية من خلال تبع تاريخي دقيق للأفكار، وكيفية استخدامها في الأنساق المختلفة. ومن ثم فإنه يتعين علينا أن نقف على مجهودات كواين في هذا المضمار.

لقد خصص كواين كتابه «مناهج المنطق» لبحث موضوعات شتى تتعلق بالمنطق الرياضي، ومن أهم الموضوعات التي تناولها في القسم الأول دالات الصدق؛ حيث عرض هذه الدالات كما هي مستخدمة في المنطق الرياضي، خاصة نسق البرنيكبيا، وحاول أن يقدم من خلال هذا الاستعراض فكرته الدقيقة عن الدالات باعتبارها من المفاهيم الرئيسية.

(١) من أهم كتابات كواين:

- Mathematical logic, New york, 1940
- Elementary logic, Boston, 1941
- From a logical Point of view, Harvard, 1953
- Selected logical Papers, New york, 1966
- Methods of logic, London 1 st ed. 1950. Third ed. 1974.

وأول الدلالات التي يتناولها كواين بالتصحيح دالة السلب. لقد اتفض له أن علامة السلب المستخدمة في برنكيبيا ماتهاتيكا وهي العلامة (~) لا تصلح للتطبيق إذا كانت لدينا متغيرات كثيرة في الدالة وأردنا تطبيق السلب عليها، ولذا فإنه كما يقول^(١) يفضل العلامة (-) التي استخدمناها تشارلز بيرس في رمزيته. فإذا كان لدينا المتغير p مثلاً وأردنا التعبير عن سلبه، فإننا نكتب المتغير في صورته الجديدة السالبة كما يلي (p̄). وإذا أردنا أن نعبر عن سلب السلب بالنسبة لذات المتغير فإن ذلك يكون بكتابته المتغير على التحر (p̄)، وهذا هو سلب السلب الذي يكافيء المتغير p منطقياً.

ومن جانب آخر فإن التعبير بطريقة كواين عن دالة الوصل يمكننا من اختصار الثواب المستخدمة في برنكيبيا. فإذا كان لدينا المتغيرات p, q, r مثلاً، فإنه يمكننا التعبير عن صدقها جميعاً في دالة وصل واحدة حين نضع المتغيرات وضعاً متجاوراً في الصيغة (pqr). ويستنتج كواين قانون صدق هذه الدالة كما يلي: تصدق الدالة فقط وفقط إذا صدقت جميع القضايا الموجودة في الدالة. وتکذب الدالة فقط وفقط إذ كانت قضية واحدة من هذه القضايا على الأقل كاذبة.

ومن هذه الصورة يتوصل كواين إلى أن الوصل بين القضية نفسها يكافيء القضية ذاتها أي أنه يمكننا اختصار الصيغة.

(pp)

و فقط إلى الصيغة

p

أما دالة الفصل فإن كواين يجد أنه من الأفضل معالجتها بصورة أدق مما عرضه نسق برنكيبيا، لأن الفصل يقع على الأقل في معندين:

١ - الفصل الاستبعادي *exclusive disjunction* وهو ذلك الذي يستبعد صدق القضيتين معاً إلى جانب استبعاده كذبها معاً:

٢ - الفصل غير الاستبعادي *non exclusive disjunction* وهو الذي يقرر صدق القضيتين معاً، ولكنه يستبعد كذبها معاً.

خذ المثال الآتي ليوضح ما يعنيه كواين بدلالة الفصل «الجنود متصررون أو الجيش متقدم»، لهذه القضية أربعة احتمالات وهي:

الحالة الأولى: الجنود متصررون والجيش متقدم

الحالة الثانية: الجنود ليسوا متصررين والجيش متقدم

الحالة الثالثة: الجنود متصررون والجيش ليس متقدماً

الحالة الرابعة: الجنود ليسوا متصررين والجيش ليس متقدماً

إنه وفقاً لرأي كواين فإننا استخدمنا الفصل بالمعنى الاستبعادي ونجد أن الدالة تكذب في الحالة الأولى «الجنود متصررون والجيش متقدم»، وفي الحالة الرابعة «الجنود ليسوا متصررين والجيش ليس متقدماً». كما أن الدالة تكون صادقة في الحالة الثانية «الجنود ليسوا متصررين والجيش متقدم»، وفي الحالة الثالثة «الجنود متصررون والجيش ليس متقدماً». أما إذا استخدمنا الفصل بالمعنى غير الاستبعادي فسوف نجد أن الحالة الرابعة وهي «الجنود ليسوا متصررين والجيش ليس متقدماً» هي الحالة الوحيدة التي تكذب فيها دالة الفصل، على حين أن الدالة وفقاً للتعریف السابق سوف تصدق في الحالات الثلاث الأولى.

لذلك فإن كواين يفضل استخدام دالة الفصل بالمعنى غير الاستبعادي، وهو نفس المعنى الذي استخدم في البرنکيبيا. فإذا كان لدينا المتغير ϕ والمتغير ψ وأردنا أن نعبر عن الفصل الاستبعادي لها، فإن ذلك يكون من خلال الصيغة:

على هذا الأساس فإن دالة الفصل تصدق إذا صدقَت واحدة على الأقل من قضاياها.

ويوضح كواين العلاقة بين الوصل والفصل والسلب بصورة محددة فنجد أنه يميز بين بعض الصيغ التي تبدو متشابهة وهي:

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1. (p q) | and - (pq) |
| 2. (p v q) | and - (p v q) |
| 3. - (pq) | and (p q) |
| 2. - (p v q) | and (p v q) |

فقد يبدو لنا في كثير من الأحيان أن هذه الصيغ متشابهة، لكن واقع الأمر أن ثمة اختلافات بينة تبدو من وضع الصيغ ذاتها. على سبيل المثال نحن نجد أن الحالة الأولى التي تقرر تمييز الصيغ (p q) نجد أن p فقط هي التي سلبت ، على حين أن الحالة المقابلة - (pq) تبين أن السلب يطبق على ما بداخل الأقواس ككل. كما ويتبين هذا الاختلاف من قراءة كل صيغة على حدة. فالصيغة (q) تقرأ « ليست هي الحالة أن p وهي الحالة أن $\neg p$ ». أما الصيغة المقابلة فتقرأ « ليست هي الحالة أن كلا من p ، q ».

ويوضح كواين بناء على ما أشار إليه من معانٍ للسلب والوصل والفصل أن القضية \neg تكون صادقة فقط إذا كانت p كاذبة، وأن ' $\neg q$... $\neg p$ ' تصدق فقط إذا كانت $\neg q$... $\neg p$ صادقة كل على حدة، وأن ' $\neg(p \vee q) \dots \neg(p \vee q)$ ' تصدق إذا لم تكن p ... q كاذبة جيئاً. وهذا يعني أن صدق أو كذب دالات السلب والوصل والفصل يتوقف على صدق أو كذب القضايا المكونة لها ، ومن ثم فهو يعرف الدالة على أنها أي « مركب من جمل إخبارية يتوقف صدقها في كل الحالات على قيم الصدق لأجزائها المكونة لها ، ومن ثم تصبح دالة

صدق «^(١)». وحتى يبين كواين أهمية هذا التعريف، فإنه يزودنا بمثال يكشف عن تعريفه بصورة دقيقة. فإذا كان لدينا المركب الإخباري «مات جونز لأنّه تناول سمكاً بالآيس كريم». في هذا المثال لمجد لدينا الحالة «مات جونز»، والحالة «جونز تناول سمكاً بالآيس كريم»، فنحن هنا إذا سلمنا بالحالتين كل على حده أمكننا أن ننكر صدق القضية المركبة والمولفة لها حيث صدق المركب يتوقف على صدق الأجزاء المولفة للمركب. لكن إذا كانت لدينا الحالات:

- (١) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم ومات. (وصل)
- (٢) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم أو مات. (فصل)
- (٣) لم يمت جونز. (نفي)

فإنه لا يمكن إنكار صدق أو كذب المركب ما دمنا قد عرفنا صدق أو كذب أجزاء المركب. وعلى هذا الأساس فإنه يمكن التعبير عن دالة الصدق truth – Function المتعلقة بكل حالة من حالات صدق أو كذب المتغيرات التي تربط بينها الدالة.

والسؤال الذي يفرض نفسه الآن: هل تكفي دالة السلب والوصل والفصل وحدتها لتأسيس دوال الصدق؟ إن كواين يرى ذلك، بل إنه يذهب إلى ما هو أبعد حين يقرر أن دالة السلب والوصل وحدتها تكفيان لهذا الغرض بدون الاستعانة بدالة الفصل، ويقدم لنا المثال الآتي:

$$(p \text{ excl - or } q)$$

تكذب هذه الدالة في حالتين، وتصدق في حالتين:

١ - حالتي الكذب

- تكذب الدالة إذا كانت p صادقة ، q صادقة.
- تكذب الدالة إذا كانت p كاذبة ، q كاذبة.

٢ - حالتي الصدق

- تصدق الدالة إذا كانت p كاذبة ، q صادقة.
- تصدق الدالة إذا كانت p صادقة ، q كاذبة.

ومن ثم فإنه يمكن التعبير عن الصيغة^(١) ($p \text{ excl - or } q$) بالصيغة:

$$- (pq) - (\bar{p}\bar{q})$$

التي تعبر عن الوصل بين (pq) - و $(\bar{p}\bar{q})$. ذلك لأن هذا الوصل ينكر $(p\bar{q})$ ، $(\bar{p}q)$. وعلى هذا الأساس يخلاص كواين إلى النتيجة القائلة بأن $(p \text{ excl - or } q)$ تكون كاذبة في حالتين حينما تكون $(\bar{p}\bar{q})$ - صادقة. وهنا تكون فكرة كسوابيس صحيحة حيث الوصل والسلب وحدهما يكفيان، نظراً لأن دالة الفصل الاستبعادي تكون زائدة^(٤).

كذلك يثبت كواين أن دالة الفصل غير الاستبعادي زائدة، وينطبق عليها ما ينطبق على الفصل الاستبعادي، حيث الصيغة $(p \vee q)$ تكون كاذبة إذا كانت p و q كاذبتين، ومن ثم فإنها تصدق إذا لم يكذبا معاً، أي حين نعم عنها بالصيغة $(\bar{p}\bar{q})$..

ويحاول كواين أن يشرح فكرته بدقة من خلال مثال يفترض فيه بعض التعقيد. افترض دالة صدق للمتغيرات p و q . و هذه الدالة تصدق في خمس حالات، وتكذب في ثلاثة حالات.

Ibld. p. 16

(١)

Ibld. p. 16

(٢)

حالات الصدق

1.	p False	q true	r true
2.	p true	q False	r true
3.	p true	q true	r False
4.	p False	q true	r False
5.	p False	q False	r False

حالات الكذب

1.	p true	q true	r true
2.	p False	q False	r true
3.	p true	q False	r False

والدالة في حالات الكذب الثلاثة الأخيرة يتم التعبير عنها كما يلي:

- ١ - $(p \wedge q \wedge r)$
- ٢ - $(\neg p \wedge q \wedge r)$
- ٣ - $(p \wedge \neg q \wedge r)$

وحق نعبر عن الدالة في وصل واحد ، فإن سلب هذه الدالات الثلاث يتم في الوصل الآتي:

$$- (p \wedge q \wedge r) - (\neg p \wedge q \wedge r) - (p \wedge \neg q \wedge r)$$

ويلاحظ أن هذا الإجراء يمكن تطبيقه على أي مركب حيث نقوم بعمل وصل لسلب كل الحالات التي تكذب فيها الدالة . ويوضح كواين أن الاستثناء الوحيد لهذا الإجراء يمكن في الصيغ التحليلية . فإذا كان لدينا مركب من القضايا $p \wedge q \wedge r$ ، وهذا المركب على هيئة صيغة تحليلية ، فإننا

نستطيع أن نعبر عن هذا المركب في صيغة وصل سلب واحدة كما يلي:

- (P Q R S)

حيث (P) كاذبة دائمًا.

من هنا يستنتج كواين أن السلب والوصل يكفيان وحدتها فقط للتعبير عن الدلالات المنطقية. ولكن هذه الفكرة لا تستبعد مجال من الأحوال فكرة الفصل؛ لأن الوصل (PQ) يمكن إحلال الفصل (P) - بدلًا منه. ولما تنبه كواين إلى هذه الفكرة^(١) حاول أن يستخدم ثابت عدم الاتساق (/) الذي أشار إليه شيفر Sheffer عام ١٩١٣ ، حيث الصيغة (P/Q) تصدق فقط إذا لم تكن P، Q صادقتين معاً: ومن ثم فإن الصيغة (P/Q) تكافئ الصيغة (PQ) . . كما أن الصيغة (P) يمكن التعبير عنها بالصيغة البديلة (P/P) وتعني أن P ليست متقدمة مع نفسها. وكذلك الصيغة (P/Q) يعبر عنها بالصيغة البديلة الآتية: (P/Q) / (P/Q).

يتضح لنا إذن أن مدة تطوراً حدث في مفهوم السلب والوصل والفصل عند كسماسن، وقد استتبّع هذا تطورات أخرى حدثت في مجال مفهوم التضمن. وقد سبق أن أشرنا وحن بصدق استعراض جهود داوث لويس في تناول فكرة التضمن، أن المناطقة يتظرون إلى هذه الفكرة باعتبارها محورية في أي نسق منطقي، لهذا فإن كواين تناول فكرة التضمن مرة أخرى حتى يبيّن مدى اتساق الأفكار التي ذهب إليها، وهذا التناول يستند إلى فكرة لويس أيضاً المستمدّة من رسائل حيث يقام التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري. فإذا كانت لدينا الصيغة (P → Q) فإن هذه الصيغة تعبّر عن دالة شرطية حيث P مقدم q antecedent تال consequent

^(١) Ibid., p. 18.

والشرط هنا يكمن في أنه (إذا... إذن...). لقد أوضح المناظقة قبل كواين أن صورة هذه الدالة تثبت الشرط؛ إلا أن كواين يرى أن إثبات الدالة الشرطية بعد بثبات إثبات شرطي للنتيجة التي تنطوي عليها أكثر من كونها إثباتاً للشرط نفسه^(١).

وأتافقاً مع المبادئ المعروضة في برنكيبا ماتهانيكا يرى كواين أن هذه الدالة تلخص حالات للصدق وحالة واحدة للكذب:

حالات الصدق:

- (١) حالة صدق المقدم وصدق التالي معا
- (٢) حالة كذب المقدم وصدق التالي
- (٣) حالة كذب المقدم وكذب التالي

حالات الكذب:

- (١) حالة صدق المقدم وكذب التالي:

ولكنه مع هذا يشير إلى أن هذه الدالة زائدة ويمكن الاستغناء عنها باستخدام أحد صيغتين^(٢):

الصيغة الأولى: وتتمثل في استخدام السلب والوصل مثل (٥٩).

الصيغة الثانية: وتتمثل في استخدام السلب والفصل مثل (٦٠).

ولكن يبدو أن كواين قد غابت عنه نقطة هامة، ذلك أن نسق برنكيبا يحدد بصورة دقيقة تعريف التضمن بدلالة السلب والفصل من جهة، ثم تعريفه مرة أخرى بدلالة السلب والوصل من جهة أخرى، وهذا ما يبدو لنا

^(١) Ibid., p. 19.

^(٢) Ibid., pp. 19-20.

بوضوح من تعريف البرنكيبيا للتضمن كما يلي :

$$\begin{array}{ll} p \supset q = \sim p \vee q & df \\ = \sim (p \cdot \sim q) & df \end{array}$$

ومن ثم فإن الاختلاف الوحيد بين كواين والبرنكيبيا في وضع هذه الدالة يمكن في مسألة التجاور بين المتغيرات وعلامة السلب الجديدة، إلى جانب هذا فإنه لا يمكن لنا الأخذ بفكرة كواين في الاستغناء عن دالة التضمن واستخدام بدائلها، ذلك لأننا داخل نظرية البرهان حين نأخذ في البرهنة على نظرية من النظريات كذلك المعروضة في البرنكيبيا إنما تستند إلى قاعدة التعمير الذي يعني استخدام البدائل طالما أن البرهان يتطلب ذلك.

إلا أن الجديد في فكرة كواين عن الشرط هو تمييزه الدقيق بين أربعة أنواع من الشرط هي: (١) الشرط العام (٢) الشرط المادي (٣) الشرط غير الحقيقي (٤) الشرط المزدوج. أما النوع الأول وهو الشرط العام فإن كواين يقدم لنا المثال التالي: «إذا كان شيء ما حيواناً فقريراً، إذن فله قلب»، هذا المثال عبارة عن مجموعة اشتراطات يصح التعبير عنها كما يلي:

«في كل قيم x فإنه إذا كان x حيواناً فقارياً، إذن x له قلب».

أما الشرط المادي، أو النوع الثاني الذي يشير إليه كواين، فهو ذلك النوع المأثور لدينا حيث يقوم بين قضيتين «إذا كان p إذن q »، أو بمعنى آخر $(p \supset q)$.

ويحاول كواين بعد ذلك أن يحدد النوع الثالث من الشرط وهو الذي يشير إليه بالشرط غير الحقيقي أي الذي يكون مقدمة كاذبةً ونتيجته كاذبة^(١) مثل «إذا كان ايزنهاور قد جرى، لكان ترومان قد خسر».

(١)

يوضح كواين أن معالجة مثل هذا النوع من الشرطيات يرتبط بالعلمية وال العلاقة النوعية بين مادة المقدم ومادة التالي؛ أو بمعنى آخر فإن هذا الموضوع أقرب إلى المنطق المادي منه إلى المنطق الرياضي؛ ولكنه في نفس الوقت يوضح مدى الخلط الذي تعاني منه فكرة الدالة الشرطية، ولذا يرى أن الفكرة لا تنتهي للمنطق البحثي بقدر انتهاها لنظرية المعنى Theory of meaning أو ربما فلسفة العلوم^(١).

وإنطلاقاً من فكرة الشرط العام والشرط غير الحقيقى التي حددتها كواين، يمكن تمييز الشرط المادي عنها. فالشرط المادي كما يرى يقوم بذاته بين القضايتين ويقدم كواين الأمثلة التالية لتوضيح فكرته الأساسية:

المثال الأول: إذا كانت فرنسا في أوروبا إذن لكان البحر مالحا.

المثال الثاني: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر مالحا.

المثال الثالث: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر عذباً.

الشرط في هذه الأمثلة الثلاثة لا معنى له، كما يرى كواين، لأن صورة الشرط الأساسية تؤسس علاقة بين وقائم لا رابطة بينها. أضف إلى هذا أنه إذا أردنا إثبات أن فرنسا تقع في أوروبا فليس هناك ما يدعو إلى استخدام اشتراطات بين قضايا نعلم صدقها وكذبها، لكن الشرط الحقيقى يقوم بين قضايا نحن لسنا متأكدون من صدقها أو كذبها كل على حدة.

أما النوع الرابع من الشرط فهو ما يسميه كواين بالشرط المزدوج، وهو عبارة عن شرط مادي مزدوج، حيث يكون على صورة وصل بين شطرين مثل:

$$(p \supset q) . (q \supset p)$$

وهو يعني p إذا وإذا فقط q ، وهذا النوع من الشرط يعبر عنه نسق برنكيبا بالتكافؤ الآتي ($p \equiv q$) أي أن:

$$p \equiv q = (p \supset q) . (q \supset p)$$

ولهذا النوع من الشرط، كما نعلم، حالتان للصدق وحالتان للكذب.

حالات الصدق:

- ١ - إذا كانت p صادقة، q صادقة.
- ٢ - إذا كانت p صادقة، q كاذبة.

حالات الكذب:

- ١ - إذا كانت p صادقة، q كاذبة
- ٢ - إذا كانت p كاذبة، q صادقة.

وحيث تناول كواين هذا النوع من الشرط حاول أن يثبت أن صيغة التكافؤ (\equiv) زائدة - كما فعل في حالة الفصل والتضمن - وذلك عن طريق استخدام صيغة بديلة هي السلب والوصل، حيث بدلاً من الصيغة ($p \equiv q$) يمكن استخدام الصيغة البديلة ($(q \supset p) \wedge (p \supset q)$) - .

لقد وجد كواين أن الأفكار والمفاهيم الجديدة التي قدمها يمكن أن تكون ذات فائدة عملية أكثر مما هو في الأنساق المنطقية الأخرى، فأضاف إلى هذه المفاهيم بعض التحليلات الجديدة، خاصة تلك التي تتعلق بقواعد الصدق، ثم حاول بعد ذلك أن يصحح بعض المفاهيم التي لدينا عن الإتساق والصحة المنطقية، ويمكن أن نتبين هذه التتعديلات فيما يلي:

أولاً - قوائم الصدق والتحليل

يشير كواين إلى أن منهج الالتماء في تحليل الصيغ المنطقية يستند بالضرورة إلى استخدام قوائم الصدق ، وهذا ما نجده عن فتجنثين ولو كاشيفتش وبوسن وغيرهم^٤؛ حيث توضع الصيغة المنطقية في قائمة صدق ، وتوضع القيم تحت المتغيرات ، ثم تقوم بتجاذب العلاقات بين المتغيرات من خلال تطبيق معنى التوابت المنطقية . لكن كواين يرى أن هذا المنهج يتطلب منا تحليل القائمة حتى نكتشف مواضع الكذب في الصيغة ، وهذا يعني بالضرورة أنه إذا كانت لدينا بعض الصيغ التي تحتوي على خمس متغيرات أو أكثر مثلاً ، فإن تحليلها يتطلب مزيداً من الدقة والجهد ، إلى جانب الخطأ الذي قد تقع فيه . الأمر الذي يتطلب منا البحث عن وسيلة مثل للتحليل ، وهو ما يحاول كواين عرضه بصورة جديدة يختلف فيها مع المناطقة .

١ - يرى كواين أنه ليست بنا حاجة لاستخدام الرموز T ، F للإشارة إلى مفهومي « صادق وكاذب » ، وإنما يمكننا فقط استخدام رمز واحد في وضعين وهو الرمز T فإذا كان الرمز T في هذا الوضع ، فإنه يشير إلى « صادق » ، وإذا كان في هذا الوضع T فإنه يشير إلى « كاذب » .

٢ - لا يرى كواين ضرورة ملحة لتحليل الصيغة المنطقية بأسرها ؛ كما يفعل السابقون ، ولكنه يختار من بين المتغيرات التي لديه متغيراً ما ويفترض صدقه مرة وكذبه مرة أخرى ، ثم يستنتج النتائج المرتبطة على ذلك . فإذا ما تبين أن المتغير الذي اختاره صادقاً ، افترض صدق أو كذب ثابت آخر ، وهكذا حتى يتوصل إلى القيمة النهائية للدالة .

٣ - إذا كان لدينا الوصل (TTT) فإنه يمكن اختصاره إلى (TT) ثم إلى (T) فقط .

- ٤ - إذا كان لدينا الفصل $T \rightarrow T$ فبأنه يمكن حذف (T) بصورة تدريجية من هذا الفصل حتى نصل إلى \perp .
- ٥ - إذا كان لدينا صيغة وصل تمحوي \perp فإنه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T .
- ٦ - إذا كان لدينا صيغة فصل تمحوي \perp فإنه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T .
- ٧ - إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها T فاننا نختصر هذا الشرط إلى التالي دون المقدم.
- ٨ - إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها \perp أو صيغة شرط تاليها T فاننا نختصره إلى T .
- ٩ - إذا كان لدينا صيغة شرط تاليها \perp فإنه يمكننا اختصار الدالة إلى نفي المقدم.
- ١٠ - إذا كان لدينا شرط مزدوج فبأننا نختصر منه T ، وتصبح الصيغة $T = T$ هي T ، وتصبح الصيغة $T \equiv T$ هي \perp .
- ١١ - نقوم بحذف \perp في الشرط المزدوج ونسلب الجزء الآخر حتى يمكن اختصار الدالة إلى هذا السلب.

إذن وفق هذا المنهج الجديد الذي يحدده كواين يمكننا إجراء التحليل على أي صيغة من الصيغ ، وهذا ما يتضمن لنا من تحليل الصيغة الآتية:

$$p \wedge q \vee \neg p \rightarrow \neg q \equiv r$$

نبدأ بتحليل هذه الصيغة كما يلي:

Tab. II. 1

نفع از مکان

پیش‌تاریخ

على هذا النحو يكشف كواين عن مفهومه الجديد لتحليل الصيغ دون الاستعانة بقوائم الصدق. وبطبيعة الحال فإن فكرة كواين جديرة بالاعتبار خاصة إذا كانت لدينا متغيرات متعددة داخل الصيغة المطلوب تحليلها. هذا إلى جانب أن الفكرة في حد ذاتها تقتضي معالجات دقيقة من جانب المناطقة للكشف عن التطورات التي يمكن أن تحدثها في هذا الجانب.

ثانياً: الاتساق والصحة المنطقية

لقد وجد كواين أن موضوعي الاتساق والصحة المنطقية للصيغ لا بد من معالجته بصورة منطقية أفضل من تلك المعالجة التي درج عليها المناطقة، ولهذا فهو ينظر للصيغة الصحيحة منطقياً **Valid Schema** على أنها الصيغة التي تكون صادقة منها صدقت أو كذبت المتغيرات التي بها. فعلى سبيل المثال الصيغة $p \vee q$. تعد صحيحة منطقياً لأننا إذا أخذنا في تطبيق المنهج التحليلي لقيم الصدق حصلنا على النتيجة.

$$\begin{array}{ccc} p \vee \bar{p} & & \\ \hline & \downarrow & \downarrow \\ -T \vee \perp & & -\perp \vee T \\ -T & & -T. \end{array}$$

T (صادق في جميع الحالات)

أما الصيغة المتسقة منطقياً **Consistent Schema** فهي تلك الصيغة التي تصدق في بعض الحالات التي تكون عليها متغيراتها، ومثال هذه الصيغة $p \vee q$ ، التي يمكن تحليلها كما يلي:

$$\begin{array}{ccccc} p \vee q & & & & \\ \hline & \downarrow & & \downarrow & \\ T \vee q & & & \perp \vee q & \\ \hline & \downarrow & & \downarrow & \\ T \vee \perp & & \perp \vee T & & \perp \vee \perp \\ T & & T & & \perp \\ & & & & \end{array}$$

في هذه الدالة نجد أن التحليل النهائي قد أفضى بنا إلى حالة كذب واحدة وثلاث حالات للصدق، ومن ثم تعتبر هذه الصيغة من الصيغ المتسقة. كذلك يعالج كواين الصيغة غير المتسقة Inconsistent schema التي تكذب في كل الحالات التي تكون عليها متغيراتها. ومن أمثلة الصيغ غير المتسقة الصيغة « $\bar{P} \bar{P}$ » التي يمكن تحليلها كما يلي:

$P \bar{P}$	
↓	↓
$T \perp$	$\perp T$
\perp	\perp
أمس	أمس

يتبيّن لنا من هذا التحليل أنه ليس ثمة حالات تصدق فيها مثل هذه الصيغة على هذا النحو يكون كواين قد عالج ثلاثة أنواع مستقلة من الصيغ هي:

(١) الصيغة الصحيحة منطقياً.

(٢) الصيغة المتسقة منطقياً.

(٣) الصيغة غير المتسقة منطقياً. ومن خلال المقارنات بين هذه الصيغ المختلفة يمكن لنا إثبات النتائج الآتية:

١ - أن الصيغة الصحيحة منطقياً هي في حد ذاتها تقىض الصيغة غير المتسقة منطقياً، وذلك بحسب مقدمة كتابه، *Introduction to Logic* حيث يوضح كواين أن الصيغة المتسقة منطقياً تقىضها صيغة غير متسقة منطقياً.

٢ - أن اختبار صحة أي دالة من الممكن أن يتوقف في أي مرحلة دون أن نصل إلى نهاية التحليل، وذلك بمجرد أن نحصل على نتيجة سلبية واحدة. فإذا حصلنا على تأليف من قيم المتغيرات نجد الصيغة فيه كاذبة (حالة كذب

الثابت الرئيسي فيها) فإن نتيجة التحليل تصبح سلبية.

٣ - أن الإجراء السابق ينصح على عدم الاتساق، لأنه من الممكن أن تتوقف عن المضي في التحليل بمجرد الحصول على حالة واحدة تصدق فيها الصيغة.

٤ - في حالة اختبار الاتساق لا نصل إلى نتيجة سلبية قبل نهاية التحليل بأي حال من الأحوال، إلا أننا قد توقف عن التحليل عندما نحصل على حالتين على الأقل واحدة منها تصدق فيها الصيغة والأخرى تكذب فيها، ومن ثم فإن نتيجة التحليل تكون إيجابية ولا داعي للمضي حتى نهاية التحليل، وهذا ما نتبنته من الصيغة التالية :

$$\begin{array}{c}
 p \vee q \wedge r \cdot c \cdot q = 1 \\
 \downarrow \\
 T q \vee \perp \wedge r \cdot c \cdot q = 1 \\
 \downarrow \\
 q \vee \perp \cdot c \cdot q = 1 \\
 \downarrow \\
 T \vee \perp \cdot c \cdot T \wedge r \\
 \downarrow \\
 T \wedge r \\
 \downarrow \\
 T \quad \perp
 \end{array}$$

يتبيّن إذن من هذا التحليل أن الدالة متسقة وليس ثمة ضرورة للمضي في التحليل إلى ما هو أبعد من هذا.

٥ - تفيد الصيغة الصحيحة منطقياً في أنها تصدق في جميع الحالات المتعلقة بالمتغيرات التي تتكون منها، ولكن إذا فحصنا هذه الصيغة أو بعض أمثلتها لوجدناها مجرد تحصيل حاصل. على سبيل المثال الصيغة « $p \wedge c$ » صيغة تحليلية وهي لا تقول لنا شيئاً، وهو ما يمكن أن نتبنته من المثال المادي الآتي:

• إذا زحف الجنود إذن فقد زحف الجنود •

هذا المثال لا يوضح لنا حقيقة هل زحف الجنود أم لا^٩ ، ولهذا فإن كواين^(١) يقرر أن أهمية الصيغة الصحيحة منطقياً ليست في كونها نتيجة مطلوب التوصل إليها ، وإنما في كونها وسيلة لاختصار رقم الصدق.

٦ - أنه يمكن لنا الاستفادة من الصيغة الصحيحة والصيغة غير المسقة في اختصار عملية التحليل ذاتها على اعتبار أن الصيغة الصحيحة يمكن أن ترفع إذا كانت تشكل جزءاً من صيغة أخرى ويوضع بدلاً منها T . مثال ذلك:

$$\frac{q \vee p}{\begin{array}{c} \downarrow \\ T \vee L \\ T \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ L \vee T \\ T \\ \hline T \end{array}}$$

من هذا التحليل يتضح أن الصيغة يمكن رفعها ووضع «T» بدلاً منها ، فإذا قابلتنا هذه الصيغة كجزء من أي صيغة أخرى أمكن القيام بهذا لإجراء ، وهذا هو جوهر الاختصار الذي يدعوه له كواين.

كذلك للصيغة «p̄» يمكن رفعها ووضع «T» بدلاً منها وهو ما يتبيّن من التحليل الآتي:

$$\frac{p \bar{p}}{\begin{array}{c} \downarrow \\ T \bar{L} \\ \bar{L} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \bar{L} T \\ T \\ \hline \bar{L} \end{array}}$$

ويكون اتباع هذا في أي صيغة غير متسقة . لكن الصيغة المسقة لا يصح

^٩Ibid, pp. 36 - 37.

فيها مثل هذا الإجراء . ولكن من أجل استكمال غاية التنظيم يمكن تحديد فئة الصيغة الصحيحة التي يمكن رفعها ووضع \top مكانها ، وهو ما نجده في الحالات الآتية :

- حالة الفصل بين أي متغيرات أو صيغ على أن يشتمل هذا الفصل على أي قضية ونقضها ، أو أي صيغة ونقضها مثل :

$$p q v q r v s \bar{p} v - (p q) , \quad « p v q v r v \bar{p} »$$

- حالة الشرط أو الشرط المزدوج (التكافؤ) الذي نجد عنصره متألينين مثل :

$$“ss \equiv ss” , “qr = qr” , “qrqas . \supset . qrvqs”$$

أما الصيغة غير المتسقة التي يمكن رفعها ووضع \bot بدلاً منها ، فإنه يمكن تحديدها أيضاً كما يلي :

- الوصل بين أي متغيرات أو قضية ونقضها مثل :

$$pvq . svr . pvs . - (pvq) , « pqr\bar{p} »$$

- حالة الشرط المزدوج بين قضية أو صيغة ونقضها مثل :

$$“qr \equiv - (qr)” \quad “p \equiv \bar{p}”$$

٧ - وهناك خاصية أخرى تتعلق بالصيغتين الصحيحة وغير المتسقة فقط وهذه الخاصية هي ما يطلق عليه كواين^(١) صيغة استبدال حرف بصيغة Substitution of Schemata for letters الصيغة والصيغة غير المتسقة ولا تصدق في حالة الصيغة المتسقة . وهذه الخاصية تعني استبدال حرف من حروف (أي متغيرات) أي صيغة صحيحة أو

غير متسقة بأي صيغة كانت . ويمكن أن نحدد بعض الأمثلة التطبيقية على هذه
الخاصة كما يلي :

- إذا قلنا أن الصيغة ' $p \wedge q$ ' صيغة صحيحة فإنه يمكننا وضع ' $q \wedge r$ ' بدلاً
من ' p ' فتنتج لنا الصيغة الصحيحة الآتية :

$$q \wedge r - (q \wedge r)$$

- إذا قلنا أن الصيغة ' $p \wedge q$ ' صيغة غير متسقة فإنه يمكننا وضع ' $q \vee r$ '
بدلاً من ' p ' فتنتج لنا الصيغة غير المتسقة الآتية :

$$(q \vee r) - (q \wedge r)$$

- أما في حالة الصيغ المتسقة فإن الأمر مختلف ، فإذا كانت لدينا الصيغة ' $p \wedge p \wedge q$ ' وهي صيغة متسقة ، وأردنا تطبيق عملية الاستبدال ووضع ' $r \wedge s$ '
مكان ' p ' فإن الصيغة التي ستنتج لدينا هي :

$$r \wedge s \wedge r \wedge q$$

وهي صيغة غير متسقة ، وهذا دليل على عدم انطباق قاعدة الاستبدال
على الصيغ المتسقة .

أنا على الأقل من الاستبدال ، وهي :-

النوع الأول : استبدال حرف بآخر . وقاعدة هذه الحالة تشرط أنه إذا
غيروا حرقا بحرف آخر فإن هذا لا يتم بالنسبة لحرف واحد في الصيغة ،
 وإنما يتم بالنسبة لكل الحروف المشابهة في الصيغة ذاتها ، مثل ذلك الصيغ
 الآتية :

$$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$$

فإذا رفينا الحرف ' p ' ووضعنا بدلاً منه ' s ' فإن هذا الإجراء لا بد وأن

يتم في الصيغة كلها ، فتصبح كما يلي :

"٥ ٩ ٩ ٣ ٢ ٤"

النوع الثاني: استبدال حروف بالصيغ . وهذا هو النوع الذي يعالجه كواين ويلاحظ فيه أن الاستبدال يصح بالنسبة للصيغ الصحيحة وغير المتسقة ، أما الصيغ المتسقة فلا يصح الاستبدال فيها ، ومرجع ذلك أن الصيغ الصحيحة وغير المتسقة تكون كذلك بموجب تعريف ثوابتها مهما تغيرت تأليف الصدق والكذب بالنسبة للمتغيرات أو الصيغ الجزئية التي تربط بها هذه الثوابت ، أما الصيغ المتسقة فهي مقيدة نسبياً بتأليفات قيم الصدق والكذب الخاصة بمتغيراتها .

النوع الثالث: استبدال الصيغ بصيغ . ولا يصح تطبيق هذا النوع كقاعدة عامة ، رغم وجود بعض الاستثناءات لذلك في حالة الصيغ المتكاملة منطقياً والتي يمكن أن تجري عليها عملية الاستبدال .

النوع الرابع: استبدال صيغ بالمحروف . وهذا النوع يعد في حد ذاته أضعف أنواع الاستبدال ولا يمكن أن يؤخذ كقاعدة .

ثالثاً : التضمن

يرى كواين أن من أدق أهداف المنطق بحث فكرة التضمن وبيان كيف أن قضية ما تتضمن قضية أخرى . فإذا كانت لدينا القضية « والقضية » فإنه علينا أن نوضح كيف أن « تتضمن ». مثال ذلك القضية « الطلاب ليسوا أذكياء » تتضمن القضية « « الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين ». يمكننا ترجمة كل قضية بصورة رمزية على النحو التالي :

p	نرمز لها بالرمز	الطلاب أذكياء
q	نرمز لها بالرمز	الطلاب ناجعون

- الطلاب ليسوا أذكياء
- نرمز لها بالرمز $\neg p$
- الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين
- نرمز لها بالرمز $(\neg p) \neg q$
- الصيغة الرمزية للتضمن هنا يمكن تحديدها كما يلي:

$$\neg p \text{ Implies } (\neg p) \neg q$$

نجد أن هذه الصيغة صحيحة، ومن ثم فهي صيغة تضمن، إذن فالتضمن يعني أنه لا تكون هناك ترجمة تبين الصدق والكذب لتغيرات الشرط حيث تكون الصيغة التي تمثل المقدم صادقة، والصيغة التي تمثل النتيجة كاذبة في نفس الوقت. وعلى هذا الأساس فإن كواين ينظر للتضمن على أنه الصحة المنطقية للشرط، ويمكن لنا اختبار هذه الفكرة عن طريق تحليل قيم الصدق كما يلي:

$$\frac{\neg p \rightarrow (\neg p) \neg q}{\neg p \rightarrow (\neg p) \neg q} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ T \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ T \end{matrix}$$

كذلك إذا أردنا أن نعرف ما إذا كانت الصيغة ' $p \vee q \rightarrow p \cdot q$ ' هي صيغة شرط أو تضمن، نقوم بإجراء التحليل كما يلي:

$$\frac{p \vee q \rightarrow p \cdot q}{p \vee q \rightarrow p \cdot q} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ T \end{matrix}$$



ويتوقف التحليل إذا وجدنا حالة واحدة يكون فيها مقدم الشرط صادقاً وتاليه كاذباً. ونتيجة التحليل تبين لنا بوضوح تام أن الصيغة $\neg q \rightarrow p$ لا تتضمن الصيغة $\neg p \vee q$.

ولتكن ناتي الآن للسؤال المأمول: هل يرى كواين أن قواعد قواعدها تتضمن؟ يرى كواين أن التضمن له قواعد محددة، وهذه القواعد يمكن تحديدها كما يلي:

القاعدة الأولى: أي صيغة تتضمن ذاتها. فإذا كانت الصيغة صادقة كان الشرط كما يلي $T \rightarrow T$. والشرط في هذه الحالة صحيح. أما إذا كانت الصيغة غير صحيحة فإن صورة الشرط في حالة كذب الثابت الرئيسي في الصيغة $\neg T \rightarrow \neg T$. والشرط في هذه الحالة صحيح أيضاً، وهذا يعني أن أي صيغة لا بد وأن تتضمن ذاتها.

القاعدة الثانية: إذا تضمنت صيغة صيغة أخرى، وتضمنت هذه الأخيرة صيغة ثالثة، فإن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثالثة.

القاعدة الثالثة: كل صيغة غير متسقة تتضمن كل الصيغ الممكنة سواء وكانت صحيحة أم متسقة أم غير متسقة، ولكن الصيغة غير المتسقة لا تتضمن إلا بواسطة صيغة غير متسقة.

القاعدة الرابعة: الصيغة الصحيحة لا تتضمن إلا الصيغة الصحيحة؛ ولكنها تتضمن بواسطة أي صيغة أخرى.

إلا أن كواين يرى أنه بالإضافة إلى هذه القواعد يمكن للرياضي أو المنطقى أن يعتمد على خياله ويستخدمه للتوصل إلى الصيغة أو الصيغ التي تنتج عن صيغة ما. فإذا كانت لدينا الصيغة $\neg q \rightarrow p$. فإنه يمكننا أن ندرك على الفور حالتين:

أ) الصيغة $p \rightarrow q$ تتضمن هذه الصيغة.

(ب) الصيغة $p \wedge q \vee p \wedge q$ تتضمنها الصيغة التي لدينا أيضاً.

ولكن يشترط الفهم الدقيق للقدرة على اكتشاف مثل هذه الصيغ أكثر من أي شيء آخر. كذلك فإن هناك بعض الصيغ التي يتضح لنا من مجرد تأملها أنها لا تكون صحيحة إلا بترجمة واحدة لمتغيراتها، وبقية تأليفاتها لا تحقق صحة الصيغة مثل الصيغة $p \rightarrow q$. هذه الصيغة لا تكون صحيحة إلا إذا كانت p صادقة، q كاذبة. في فحص مثل هذه الصيغة ومحاولة معرفة ما إذا كان يلزم عنها صيغة أخرى أم لا ، نقوم بالإجراء التالي : نضع مكان كل متغير في الصيغة الثانية (أي الصيغة التي تتضمنها الصيغة المعطاة) قيمة الصدق أو الكذب الخاصة بنفس المتغير في الصيغة الأولى والتي تتحقق الحالة الوحيدة المعطاة للصحة بالنسبة للصيغة الأولى ، ثم نطبق منهج تحليل قيم الصدق على الصيغة ، فإذا نتجت لدينا T أو صيغة صحيحة فإن معنى هذا أن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثانية.

مثال: التضمن الآتي $\neg p \rightarrow q \vdash p \rightarrow q$ implies $\neg p \rightarrow q$ نضع T مكان p ، F مكان q فنحصل على النتيجة .

$$\neg F \rightarrow T \vdash T$$

وبتحليل هذه الصيغة نحصل على

$$T \vdash T \rightarrow T$$

$$T \vdash T$$

$$T$$

ومعنى هذه النتيجة أن التضمن صحيح.

كذلك إذا كانت هناك بعض الصيغ التي يبدو لنا من مجرد ملاحظتها

أن الثابت الرئيسي يصدق في حالة واحدة فقط فإن هناك نوعاً آخرأ من الصيغ يتضح أنها تصعب كاذبة بترجمة واحدة فقط لمتغيراتها أما بقية التأليف الممكنة للتغيرات فتحقق صدق الثابت الرئيسي . فالصيغة (pq) - تكذب فقط إذا كان كل من 'p' ، 'q' صادقاً ، أي T . كذلك إذا فحصنا الصيغة .

$$p \supset p . q \supset r \text{ implies } p \supset r$$

لوجدنا أن $r \supset p$ تكذب فقط إذا كانت 'p' هي 'T' ، '2' هي '1' ثم نقوم بوضع T مكان 'p' ، '1' مكان '2' في الصيغة $p \supset q . q \supset r$ ، فينتج لدينا :

$$T \supset q . q \supset 1$$

$$'q . q'$$

وهي صيغة غير متسقة مما يدل على أن التضمن المطلوب اثباته صحيح . إن التضمن كما يشير إليه كواين يعتبر كذلك من ناحية قيم الصدق ، أي بناء على الاعتبارات المنطقية وحدهما ، ولذا فهو يميز بين التضمن Implication وعلاقة الشرط 'if... then' فالتضمن هو الصحة المنطقية لعلاقة الشرط بين صيغتين .



تلك هي آخر التطورات المنطقية التي لا زال البحث يدور حولها حتى يومنا هذا ، وقد كشف مؤتمر سالزبورج الأخير الذي عقد في يوليو ١٩٨٣ عن استمرار المناقضة وعلماء الرياضيات في بحث بعض الموضوعات الجزئية لتطوير البحث المنطقي الرياضي بصورة تنسق مع التفكير المنطقي الرياضي ذاته .

القسم الثاني

نظيرية حساب القضايا في أسواق المنطق البولندي

الفصل الخامس

بيان لوكاشيفتش ومقدمات النسق الاستباطي لنظرية حساب القضايا

ركزت الدراسات المنطقية الحديثة، بصفة عامة، على دراسة المنطق الرياضي من خلال النسق الذي عرض في «مبدئي الرياضيات» للعلامة برتراندرسل وتوامه الرياضي الفرد نورث هويتهد، وقد عرف ذلك النسق في أواسط المناطةقة وعلماء الرياضيات بنسق «برنكيبيا» Principia (1910 - 1913). وكان من الطبيعي أن تحلل دراسة هذا النسق صفحات وصفحات من نظرية المنطق لسهولة وساطة النسق، من جهة، ولاصطناعه¹ لغة رمزية دقيقة سهلت عملية الاتصال الفكري بين المناطةقة وعلماء الرياضيات من جهة أخرى. إلا أن هذه البساطة لم تمنع بحال من الأحوال المحاوالت التي بدلها مناطقة ورياضيون آخرون للتوصيل لبناء أنساق بديلة تعتمد على أفكار منطقية أبسط من المعروضة في «البرنكيبيا»، الأمر الذي أشرنا إليه في القسم الأول.

ويمتنا أن نقر هنا أن اتجاه الدارسين لمناقشة واستعراض نسق «البرنكيبيا» أدى إلى نتيجتين سليتين وهما: الأولى، تمثلت في إهمال التطور الدقيق والهام الذي حدث فيما بين العالمين العالميين وأوائل الخمسينات لدى المناطةقة البولنديين، ومن عملوا على تطوير أبحاث المنطق الرياضي، واصطنعوا في كثير من الحالات رمزية مختلفة عن رمزية «البرنكيبيا»، ومن

أهم هؤلاء الأعلام وأشهرهم، «يان لوكاشيفتش»^(١)، و«بوخننسكي»، و«كوتربنسكي»، و«سلويسكي» و«بوركوفسكي».

وتمثلت الثانية في إهمال الأبحاث والدراسات المنطقية عند العرب تحت تأثير الآراء القائلة بأن العرب لم يأتوا بجديد في المنطق، وأنهم في الغالب الأعم لم يضيفوا شيئاً جديداً للأراء المنطقية التي وفدت عبر حركة نقل التراث. وليس لهذا الرأي ما يبرره على مستوى الواقع الفكري للمنطق العربي، إذ توفر لنا أن نطلع على أبحاث منطقية عميقة ومتقدمة، كشفت عن إبداع منطقي وفكري في هذا المجال، وقد تم تقديم ذلك في بحث آخر بصورة شبه متكاملة وربما أفضى هذا فيما بعد إلى كشوفات منطقية أبعد^(٢).

لقد عرضنا لنق منطق الموجهات عند لوكاشيفتش، ذلك المنطقي، الذي يعتبر علمياً بارزاً من أعلام المدرسة البولندية الحديثة، وكانت فكرة البحث في الموجهات من الأفكار الهمامة داخل حلقات البحث المنطقي على الصعيد العالمي، وقد أصطنع رمزية دقيقة حلت بعض الإشكالات المنطقية في إطار منطق الموجهات بصفة عامة. وحين عرضنا لنق الموجهات، استبعدنا فكرة البحث عن النسق الاستباقي الذي يتنظم نظرية حساب القضايا، فلم نكن وقتئذ بصدّ معالجة تلك النظرية، وأردنا في الورقة نفسه أن تفرد لها مكاناً متاماً لإبراز الإسهام البولندي الرائد في مجال فكرة النسق الاستباقي بصورة عامة.

واستكمالاً لفكرةنا الرئيسية عن إسهامات المدرسة المنطقية في بولندا، اخترنا نموذجين اثنين لنعرض من خلالهما النسق الاستباقي لنظرية حساب

(١) ترجم الدكتور عبد الحميد صبرة، نظرية القياس الأرسطية من وجهة نظر المنطق الصوري الحديث، والذي يعد من الأعمال الرائدة للمنطقي البولندي يان لوكاشيفتش، وصدرت الترجمة عام ١٩٦١.

(٢) راجع بعض الآراء الهمامة حول المنطق العربي في

القضايا، وكيفية إقامة النظرية بمجملها كنسق اكتسيوماتيكي بحث. أما النمذج الأول فيتمثل في الأفكار التي قدمها لوكاشيفتش لبناء النسق الاستباطي. وأما النمذج الثاني، فيعرض لنا نسق سلويسكي - بوركوفسكي الذي يُعد من أحدث الأساق المتكاملة التي صدرت عن المدرسة البولندية في العشرين حاماً الماضية.

وقد يكون من المناسب أن نشير إلى أن هذا النسق الأخير لا يعد بدليلاً لنسق برنيكيبيا، رغم أن سلويسكي وبوركوفسكي كانا قد اقترحوا هذا النسق، وو جداً فيه سهولة أكثر من نسق برنيكيبيا. لكننا مع هذا سنظل أمام تساؤلات مفتوحة، وضمنا نسق برنيكيبيا أمامها، وأهمها التساؤل عما إذا كان أي نسق منطقي جديد يسر في نفس اتجاه برنيكيبيا؟ أم أن المناطقة، والرياضيين على السواء، يصطنعون لأنساقهم درباً آخرًا غير المألف في عالم برنيكيبيا؟ وهل يمكن أن يعتبر من وجهة النظر هذه، النسق الذي ابتدعه سلويسكي وبوركوفسكي مفيداً من وجهة النظر المنطقية والرياضية؟ أم أن نسق البرنيكيبيا سيظل على الأقل لأجيال وأجيال قادمة هو الرائد، ما لم يتتطور تفكيرنا الرياضي والمنطقي، على الأقل بصورة تكشف عنها تطورات واكتشافات منطقية جديدة؟

إن كل هذه التساؤلات وغيرها، معروضة أمام العلماء منذ لا يقل عن نصف قرن من الزمان، وعلى كثرة وتعدد الأساق المنطقية والرياضية المقترنة، لم ينفع علماء الرياضيات والمنطق في اصطدام بديل صحيح ونسقي إلا في أجزاء ضئيلة جداً من النظرية، ولم يكتب، حتى الآن لمحاولات الخروج على نسق برنيكيبيا إلا نجاح محدود ولكنني تبين صحة هذا الرأي من عدمه لا بد من أن نتناول بالتحليل نسق لوكاشيفتش أولاً، ثم تتجه بعد ذلك إلى معالجة نسق سلويسكي - بوركوفسكي مباشرة.

ناقشتنا في الفصل الثاني منطق الموجهات عند لوكاشيفتش، وظهرت أهمية ذلك التناول من خلال تبعنا لفكرة التضمن في أساق المنطق

المختلفة. وكما زعمنا في مقدمة هذا البحث، بعد الإسهام المنطقي الرائد للمدرسة البولندية ذا مكانة خاصة في تاريخ المنطق بصفة عامة، وعلى درجة كبيرة من الأهمية في تناول أنساق أخرى بديلة غير نسق «برنكيبيا» الذي فتن علماء الرياضيات والمنطق معاً. أضاف إلى هذا أنه كان بمقدور الأبحاث، التي تشير بوضوح إلى دقة الأساق البديلة، أن تكشف عن ومزية جديدة تعالج البراهين الرياضية - المنطقية بصورة دقيقة، وعلى درجة من الوضوح والإيجاز والبساطة في الوقت نفسه.

ويُعد النسق الذي صاغه المنطقي البولندي لوكاشيفتش من أهم الأساق المنطقية المعاصرة التي ظهرت في فترة ما بين الحربين. ونحن هنا نحاول أن نحيط اللثام عن هذا الوجه المنطقي للمدرسة البولندية لنقدم صورة نسقية للأفكار التي قدمها لوكاشيفتش والتي قد يبدو من المناسب أن نعرض لأنكارها ومقدماتها الأساسية، وترك مهمة استعراض النسق متاماً لمنطق ونسق «سلويسكي - بوركوفסקי» الذي أقام صورة متكاملة للحساب.

الحدود الابتدائية وبديهيات حساب القضايا:

يستخدم نسق حساب القضايا عند لوكاشيفتش نوعين من الحدود الابتدائية هما:

- ١- يرمز النسق لفكرة السلب Negation بالرمز N.
- ٢- يرمز النسق للقضية الشرطية بالرمز C.

وينظر النسق لرمزي السلب والشرطية على أنهما الثابت الابتدائية الرئيسية في ذلك النسق. بالإضافة إلى هذا يستخدم الحروف الصغيرة من الأبجدية اللاتينية كمتغيرات قضائية، أي كمتغيرات تأخذ قيمًا لتصبح قضايا. والتعبير الذي صورته NP هو نفي القضية P . والتعبير كلّ نطلق عليه دالة Function، وهذه الدالة تتألف من الرابط N ، والمحجة P .

ونلاحظ، كما في الأنساق المنطقية الأخرى، أن التعبيرين P ، NP ، P ، قضيتي متناظرتين، وهما لا تصدقان معاً، بمعنى أنه إذا كانت القضية P صادقة فإن القضية NP يجب أن تكون كاذبة، والعكس.

ويقدم النسق فكرة جديدة، حيث نجد أنه يشير إلى القضية الكاذبة بالرمز O ، ويشير إلى القضية الصادقة بالرمز 1 ، وبذا يصبح لدينا:

$$NO = 1 \quad , \quad N1 = O$$

وتقرأ هذه الصيغة كما عليه: «نفي القضية الكاذبة قصبة ساده، مثلث القضية الصادقة قضية كاذبة».

والدالة Cpq قضية شرطية تعبر عن التضمن، وتقرأ «إذا p فإن q ». في هذه الصيغة نجد أن الرابط C الذي يشير إلى التضمن جاء في بداية الدالة، على خلاف ما هو مألوف في منطق البرنوكبيا. لقد فضل لوكاشيفتش أن تأتي الرموز الدالة على الثوابت في بداية الدالة، والسبب الذي جعله يفضل هذا الإجراء رغبته في التخلص من الأقواس.

إلا أنه ينبغي تسجيل موقف هام يقدمه لوكاشيفتش على صيغة التضمن السابقة Cpq . إن هذه الصيغة كما يرى لوكاشيفتش، وفقاً لكل الآراء المنطقية السابقة، تعبر عن القضية: «If p is then q is»، أي «إذا كانت p موجودة فإن q موجودة». لكن هذه الصيغة، كما يرى لوكاشيفتش⁽¹⁾، ليست صحيحة تماماً، والسبب في هذا أن الصيغة السابقة تكون ذات معنى فقط إذا عالجنا المتغيرات كمحدود متغيرات. لكن التضمن Cpq لا توجد فيه إلا متغيرات قضائية.

وهنا نتساءل: ما هي، في رأي لوكاشيفتش، الحالات التي بموجبها تصبح Cpq صادقة أو كاذبة؟

⁽¹⁾ Lukasiewicz, Jan., Elements of Mathematical Logic, Trans-by Olgierd Worjetasiewicz, Per-gamon Press, London, 1963, P. 25.

إننا إذا استخدمنا الرمز 1 للإشارة إلى صادق، والرمز 0 للإشارة إلى كاذب، ويدأنا نحلل الصيغة السابقة للتضمن سنجد أن لدينا الحالات الأربع التالية:

C00, C01, C10, C11

نلاحظ على الحالات السابقة ما يلي :

- ١ - أن الحالة $0 = C10$ ، حيث نجد هنا أن مقدم التضمن الصادق، وتاليه الكاذب، يؤدي إلى تضمن كاذب.
- ٢ - أن الحالة $1 = C00$ ، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه كاذب وتاليه كاذب، هو تضمن صادق.
- ٣ - أن الحالة $1 = C01$ ، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه كاذب، وتاليه صادق، هو تضمن صادق.
- ٤ - أن الحالة $1 = C11$ ، تشير إلى أن التضمن الذي مقدمه صادق، وتاليه صادق أيضاً، هو تضمن صادق.

لقد أراد لوكاشيفتش أن يتحقق جهازاً استباقياً دقيقاً للمنطق، وفقاً لأفكار دقة ومحنة، حيث يستند النسق ككل إلى بديهيات Axioms ومبرهنات Theorems يطلق عليها معاً المصطلح مقررات Theses، وهو مصطلح أخذ أصلاً من المثلكي البولندي ليشنفسكي S. Lesniewski.

بديهيات نسق حساب التضميناً:

يقدم النسق بديهيات ثلاثة رئيسية هي:

١ - $OOpqOOpqr$,

٢ - $OONppp$,

٣ - $OpONpq$.

يلاحظ على البديهية الأولى أنها إحدى صور قانون القياس الشرطي الذي صاغه أرسطو، هذا القانون الذي قد يظهر على الصورة التالية أيضاً:

$CK \overline{Opq} Cqr Opr$.

يلاحظ على الصورة التي لدينا أن الرمز K يرمز إلى الوصل، ومن ثم فإن الصيغة kpq تقرأ « p and q ».

أما الصيغة الثانية لقانون القياس الشرطي فتقرأ:

«إذا (إذا p فإن q ، وإذا q فإن r)، إذن إذا p فإن r ».

وبنفي أن نلاحظ أن البديهية الأولى، السابق الإشارة إليها، يمكن أن تشق من القانون الثاني للقياس الشرطي، بالإضافة إلى قانون التصدير الذي صورته:

$CC \overline{Kpq} Op Cqr$.

وهناك نقطة هامة تتعلق بصورة هذا القانون، فهو يسمح لنا في حالة التضمن الذي في مقدمة وصل من قضيتين، أن نقل إحداهما مكان التالي، مثال ذلك التضمن التالي:

«إذا كان x عدد صحيح و x قابل للقسمة على 3 ، فإن x يقبل القسمة على 6 ».

في هذا التضمن باستخدام قانون التصدير وقاعدة التعمييف، بالإضافة إلى إثبات التالي نحصل على:

«إذا كان x عدد صحيح، فإن (إذا كانت x قابلة للقسمة على 3 ، إذن x تقبل القسمة على 6)».

وعن طريق هذه الصورة نستطيع أن نتوصل إلى البديهية الأولى عن

طريق افتراض الصورة الثانية من قانون القياس الشرطي . فإذا وضعنا في الصيغة السابقة cpr بدلاً من p ، cqr بدلاً من q ، cpr بدلاً من r ، فإننا نحصل على الصيغة التالية :

$$\underline{CCKCpqCqrCprOCpqCCqrCpr}.$$

وينفس الطريقة يمكن أن نصل إلى صورة القانون الثاني للقياس الشرطي ، ولكن عن طريق قانون الاستيراد الذي صورته :

$$CCpCqrOCKpqr.$$

أما البديهة الثالثة والتي صورتها $cpcnpq$ فإذا وضعنا 1 بدلاً من p فإننا نحصل على :

$$c1c\ n1q$$

وعن طريق قاعدة الإثبات بالفصل نحصل على :

$$cn1q$$

ولما كانت $1 = n0$

إذن ينتج لدينا

$$c0q$$

معنى هذا أن البديهة 3 تقرر تضمناً مقدمه كاذب وتأليه غير محدد.

وكما يلاحظ لوكاشيفتش⁽¹⁾ فإن البديهة 3 يمكن اشتقاها من قانون التصدير إذا ما أضفنا إليها مبرهنة أخرى ، وقد كانت هذه الصورة مألوفة لدى دونس سكوتيس Duns Scotus أحد أعلام الفلسفة في أواخر القرن الثالث عشر وأوائل القرن الرابع عشر الميلادي . لقد أكد سكوتيس أنه إذا كانت القضايان المتناقضتان مصادقين معاً ، فإن كل شيء سيبقى ممكناً ،

والسبب في ذلك أنه ليس من الممكن أن تصدق المتناقضتين معاً. والمبرهنة التي قدمها سكوتون في هذه الحالة صورتها:

O K p N p q.

لكتنا نتساءل: هل يأخذ نسق لوكاشيفتش في الاعتبار بتعريفات وقواعد للاستدلال محددة؟ أم أنه يعتمد في نسقه على الأفكار السابق طرحتها في الأساق الأخرى، خاصة نسق برنكبيا؟.

من الواضح أن نقطة البداية عند لوكاشيفتش مختلفة إلى حد كبير، فالنسق الذي بين أيدينا جديد في كل ما يطرحه من أفكار، وهو أيضاً يعتمد على تقديم أفكار جديدة ودقيقة بالإشارة إلى الأساق الأخرى.

التعريفات وقواعد الاستدلال:

يشير النسق إلى أمرين هما:

١ - الحدود الابتدائية Primitive terms

٢ - الحدود المعرفة Defined terms

لكن لوكاشيفتش يفضل أن يزودنا في البداية بنظرية للتعریف حتى يميز بين الأشياء، ولا يختلط المعرف بالمعروف. وهو يناقش المسألة من خلال مثال بسيط ودقيق معاً، خذ تعریف المربع مثلاً:

المربع = شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية.

نلاحظ على التعریف السابق علامة (=)، ونلاحظ أيضاً أن الكلمة مربع جاءت على يمين العلامة (=)، وأن التعریف شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية، ورد على يسار العلامة (=). ومن هذا التعریف نجد أن الطرف الأيمن له نفس معنی الطرف الأيسر. إن الطرف الأيسر الذي يقول

شكل جوانبه متساوية ومتوازية وزواياه متساوية هو المعرف *definiens*، وسنزء له اختصاراً بالرمز (ds). أما الطرف الأيمن (*definiendum*)، أي موضوع التعريف، وسنزء له اختصاراً بالرمز (dm). إن ما هو معرف (dm)، وفق رأي لوكاشيفتش، لم يكن شاملاً قبل إدخال التعريف عليه، ولهذا السبب فإن معنى (dm) يوضع أو يشرح أو يفسر فقط بالمعرف (ds).

وواقع الأمر أن المعرف (ds) لا بد وأن يكون شاملًا وجامعاً حتى قبل إدخال التعريف، وهذا في ذاته بين ويرهن استحالة تعريف كل حدود النظرية، وضرورة تبني بعض الحدود الابتدائية.

إلا أن لوكاشيفتش يرى أن هناك خاصية هامة وضرورية ينبغي إضافتها إلى ما سبق تقريره. فإذا كان ما هو معرف (dm) وارد في جملة صادقة، إذن فإن الجملة التي نحصل عليها من الأولى عن طريق إحلال ما هو معرف (dm) بمعرف (ds) دقيق ينبغي أن يبقى صادقاً. على سبيل المثال إذا ورد المعرف (ds) في قضية صحيحة إذن فإن استبدال المعرف (dm) بالمعرف (ds) بدقة يجب أن يؤدي إلى قضية صادقة.

إن آراء لوكاشيفتش حول التعريف، لا شك كانت معلومة ومعروفة جيداً في المنطق التقليدي، وقد فعلن إليها المنطق الرياضي منذ بداية الأمر، وكذا تنبه إليها رسل وهو انتهت وما بصدق وضع النسق المتكامل للبرنوكبيا. لكننا على أية حال نرى أن للتعريف أهمية كبيرة في نظرية حساب الفضایا والنسق الاستباقي ككل، ونقرر أن الميزة الكبرى للتعريف، بالإضافة إلى كونه يلعب دوراً هاماً وأساسياً في عملية الاستدلال، تكمن في أمرین: الأول، أن التعريفات تستخدم كاختصارات لتعويزات معينة تتعمى إلى نظرية معينة معطاة لنا. والثاني، إننا حين نقدم المصطلح جديداً للتعريف، فإن هذا المصطلح قد يسمم في تأسيس النظرية بصورة حدسية، ومن ثم يضيف إلى

الحدود التي تتسمى للنظرية موضوع التسلُّل حدوداً جديدة ذات معنى^(١).

أما الأمر الغريب فإنه يبدو في رأي لوكاشيفتش^(٢) بأن رسول وهو اتهام في البرنكيبيا نظراً للتعرِيفات على أنها زائدة من الناحية النظرية. ولسنا نرى لهذا الرأي أي مبرر، إذ أن نسق برنكيبيا على خلاف ما يعتقد لوكاشيفتش. لقد قرر رسول وهو اتهام منذ البداية، أنهما يريدان أن يتحققا للمنطق والرياضيات أيضاً أعلى درجة ممكنة من الصورية، وهذا لن يتضمن بطبيعة الحال إلا إذا نظر للتعرِيفات على أنها تأخذ الصورة الرمزية البحتة. والدليل على ذلك أنهما تخلصا من اللغة النظرية البحتة في متن النظريات، بعد أن انتهت مقدمة الكتاب. أضف إلى هذا أن نسق البرنكيبيا قدم لنا مجموعة من التعريفات الهامة في النظريات التي تناولها النسق^(٣).

لا زال السؤال الذي يعنيه الأن هو: هل قدم لوكاشيفتش ضمن جهازه الرمزي تعريفات يمكن أن يبدأ منها النسق، أم لا؟.

يقدم لوكاشيفتش في نسقه مجموعة من التعريفات الأساسية التي ينظر إليها على أنها موضوعة في صورة رمزية كاملة، وهو يضع لنا هذه التعريفات مستفيضاً من كل الأفكار التي سبق أن قدمها عن الصدق والكذب، والرابط، وغيرها.

١ - تعريف رابط الفصل:

إن أول تعريف يقدمه لوكاشيفتش هو تعريف رابط الفصل A، والذي يضعه ليناظر (or) في الانجليزية، و(أو) في العربية، تلك الرابطة التي تدل

Curry, H. B., «First Properties of Functionality in Logical Expressions», J. of, Symbolic Logic, Vol. 2 (1937), PP. 2.

Ibid, P. 32.

(٢) راجع كتابنا: فلسفة العلوم: المنطق الرياضي، جـ ٣، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٨٥ ص ٨١ - ص ٨٧، ص ١٠٧، ص ١٦٩ - ص ١٧١، ص ١٩٦، ص ٢٠١، ص ٢٠٢، ص ٢١٨.

على البدائل. وينظر لوكاشيفتش إلى هذا الرابط على أنه العامل الأساسي في تكوين القضايا. ويقرر بذلك أن التعبيرين الآتيين لهما نفس المعنى:

Apq ، $cnpq$ ، ومن ثم فإن:

$$Apq = cnpq$$

ولهذا التعريف عند لوكاشيفتش، إذا استعنا بقيمتى صادق وكاذب، أربع حالات:

$$A00 = CN00 = C10 = 0,$$

$$A01 = CN01 = C11 = 1,$$

$$A10 = CN10 = C00 = 1,$$

$$A11 = CN11 = C01 = 1.$$

ومن هذه الحالات الأربع نشق قانون رابط الفصل على النحو التالي:
الدالة Apq تكون كاذبة فقط إذا كان المقدم والتأخير فيها كاذبين معاً، وتتحقق في الحالات الأخرى.

٢ - تعريف رابط الوصل:

يستخدم لوكاشيفتش من نسقه الرابط k ليناظر الكلمة (and) في الانجليزية، وكلمة (و) في العربية، تلك الكلمة المستخدمة في لغة الحياة اليومية للتعبير عن الوصل. وبوضع التعريف التالي لرابط الوصل.

$$kpq = ncpnq$$

نلاحظ على الصيغة التي لدينا أن التعريف الذي وضعه للوصل هو سلب التعبير $cpnq$ ، وصدق هذا التعبير يستبعد إمكانية صدق p ، q معاً. وطالما أن الدالة kpq هي سلب أو نفي التعبير $cpnq$ فإنها تكون صادقة فحسب إذا كانت الجملة (p and q) لا تستبعد إحداها الأخرى، ولكنها صادقتان معاً. ويداً فإن التعريف السابق يؤدي إلى الحالات الأربع التالية:

$$\begin{aligned} K00 &= N00N0 = N001 = N1 = 0, \\ K01 &= N00N1 = N00 = N1 = 0, \\ K10 &= N01N0 = N011 = N1 = 0, \\ K11 &= N01N1 = N010 = N0 = 1. \end{aligned}$$

من هذه الحالات الأربع يمكن لنا أن نستنتج قانون رابط الوصل على الصورة التالية: الدالة k_{pq} تكون صادقة فقط إذا كان كلاً من المقدم وال التالي صادقين، وتكون كاذبة في بقية الحالات الأخرى.

٣ - تعريف رابط اللا - وصل:

يقدم لنا لوكاشيفتش في نسخه الرابط الجديد D الذي يرمز به إلى اللا - وصل، أو البديل النافي. وهذا الرابط لا يوجد له مقابلًا في الأساق الأخرى، ولا هو يماثل، أو يناظر أيضًا، كلمة محددة في اللغة الإنجليزية. ويقدم لنا التعريف التالي :

$$D_{pq} = c_{pq}n_{pq}$$

ومن هذا التعريف نتوصل إلى الحالات الأربع التالية:

$$\begin{aligned} D00 &= C0N0 = C01 = 1, \\ D01 &= C0N1 = C00 = 1, \\ D10 &= C1N0 = C11 = 1, \\ D11 &= C1N1 = C10 = 0. \end{aligned}$$

ومن هذه الحالات الأربع نشتغل القانون التالي: الدالة D_{pq} تكون كاذبة فقط إذا كان كل من المقدم وال التالي صادقين، وفيما عدا ذلك من الحالات فإنها تكذب.

٤ - تعريف رابط التكافؤ:

يرمز لوكاشيفتش للتكافؤ بالرمز E ، ويقدم لنا التعريف التالي :

$$E_{pq} = n_{cpq}n_{cqp}$$

والتعبير Epq يقرأ «إذا وفقط إذا p ». ومن التعريف السابق نحصل على الحالات الأربع التالية:

$$E00 = NCC00NC00 = NC1N1 = NC10 = N0 = 1,$$

$$E01 = NCC01NC10 = NC1N0 = NC11 = N1 = 0,$$

$$E10 = NCC10NC01 = NC0N1 = NC00 = N1 = 0,$$

$$E11 = NCC11NC11 = NC1N1 = NC10 = N0 = 1.$$

من هذه الحالات الأربع نستقرع التعريف التالي:

الدالة Epq تكون صادقة فقط إذا كانت p ، q صادقتين معاً أو كاذبتين معاً. أما إذا كانت إحداهما صادقة والأخرى كاذبة فإن الدالة فكرة كاذبة.

ذلك هي الأفكار الرئيسية التي يقللها لنا المنطق البولندي «يان لوكاشيفتش» والتي على أساسها يقيم النسق المتكامل لنظرية المنطق. ولما كان منطق الموجهات عند لوكاشيفتش الذي قدمنا عرضاً له في «المنطق الرياضي: التطور المعاصر» قدّم صورة برهانية لكيفية انتقال النسق عند «لوكاشيفتش» للبرهنة ابتداءً من مقدمات النسق، فقد رأينا أن نكتفي بالاستعراض أنس نظرية حساب القضايا في نسقه، على أن نقدم صورة نموذجية متكاملة للحساب عند «سلويسكي - بوركوفسكي» في النسق الذي سنعرض له تواً.

الفصل السادس

سلوبسكي - بوركوف斯基 والنسق المتكامل لنظرية حساب القضايا

الرمزية والصيغ في نسق سلوبسكي - بوركوف斯基:

يستخدم نسق سلوبسكي - بوركوف斯基 نوعين من الرموز:

١ - رموز يشير بها إلى المتغيرات القضائية^(١) Sentential Variables

$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots$

وهذه الرموز تتفق مع الرمزية المستخدمة في برنكبيا ماتيماتيكا، إلا أن رسول وهو أيتهد لم يستخدما في نسق البرنكبيا p_1, q_1, r_1, \dots وتشير هذه المتغيرات إلى قضايا، أو جمل sentences توصف بأنها إما صادقة true أو كاذبة false.

٢ - الثوابت Constants وهي تمثل الروابط التي تقوم بين المتغيرات القضائية لتشكل صيغًا مركبة، وهذه الثوابت هي:

أ - ثابت النفي negation ويرمز له بالرمز \neg ، ويصبح التعبير « $\neg p$ » معتبراً عن نفي القضية p . ويقرأ not p أو ليس من الصادق أن p .

ب - ثابت الوصل Conjunction ويرمز له بالرمز \wedge ، الذي يعبر عن الضرب المنطقي في الصيغة المركبة « $p \wedge q$ » التي تقرأ « p و q ».

(١) يفضل مناطقة المدرسة البولندية بصفة عامة استخدام مصطلح Sentence، Variables بدلاً من مصطلح البرنكبيا Propositional Variables.

- ـ ثابت الفصل disjunction ورمزه \vee ، والذي يعبر عن الجمع المنطقي في الصيغة المركبة « $p \vee q$ » التي تقرأ « p أو q » .
- ـ ثابت التضمن implication ورمزه \rightarrow ، حيث الصيغة المركبة « $p \rightarrow q$ » تقرأ «إذا p فإن q » .
- ـ ثابت التكافؤ equivalence ورمزه \equiv ، حيث الصيغة المركبة « $p \equiv q$ » تقرأ « p إذا وإذ فقط q » .

تعبر هذه الثوابت عن المفاهيم الأولية للعمليات المنطقية التي سيعمل من خلالها نسق سلوبيسكي - بوركوفسكي ، حيث نلاحظ عليها ملاحظتين أساسيتين لا بد من تسجيلهما وهما :

أولاً : أن ثابت النفي المستخدم في هذا النسق يختلف عن الأساق الأخرى. لقد استخدم ديل وهو ابتهج الثابت \sim في نظرية حساب القضايا ، واستخدم لويس في كتاباته المختلفة^(١) الثابت (\neg) للتعبير عن النفي أو السلب ، والملاحظ أيضاً أن هلبرت^(٢) استخدم من قبل نفس الثابت للتعبير عن السلب. أما لوكاشيفتش فقد فضل أن يخرج من نطاق هذه الرمزية الدارجة ويستخدم حرف الأبجدية N ليعبر به عن السلب.

ثانياً : أن استخدام سلوبيسكي - بوركوفسكي لثابت التضمن \rightarrow لم يكن الأول من نوعه ، فقد استخدم هلبرت نفس الثابت من قبل. أما لويس فيختلف استخدام ثابت التضمن الدقيق عنه \exists عن ثابت التضمن عند سلوبيسكي - بوركوفسكي .

(١) راجع في ذلك :

Lewis, C.I., A Survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918.

Lewis, C.I. and C.H. Langford., Symbolic Logic, New York, 1932.

(٢) راجع ما كتبناه عن هلبرت في : المنطق الرياضي ، مرجع سابق ، ص ٢٧٣ - ٢٨١ .

ومن الواضح أن استخدام الروابط \wedge ، \vee ، \rightarrow ، \equiv ، في نسق سلوسكي - بوركوف斯基 يشير إلى قضائياً مركبة جديدة، تماماً كما هو الحال في نسق برنكيبية.

ذلك لا يستخدم النسق الذي بين أيدينا الأقواس، لقد استبعدتها تماماً حتى لا يحدث أي خلط بين الصيغ. ومن جانب آخر نجد أن نسق سلوسكي - بوركوف斯基 يحدد الصيغ القضائية التالية:

- ١ - أن المتغيرات القضائية هي في حد ذاتها صيغ قضائية.
- ٢ - إذا كانت $\varphi \equiv \emptyset$ وكذلك $\varphi \rightarrow \emptyset$ و $\varphi \wedge \emptyset \equiv \emptyset$ و $\neg \varphi \equiv \emptyset$

هي في حد ذاتها صيغ قضائية.

٣ - كل صيغة قضائية في حساب القضائيا إما إنها متغير قضائي أو أنها مؤلفة من متغيرات قضائية بموجب القاعدة السابقة.

لقد استبقي هذا النسق المعروف اليونانية \emptyset ، \neg ، \wedge كمتغيرات تشير إلى الأسماء في نظرية حساب القضائيا، كما هو الحال في نسق برنكيبية.

القواعد الابتدائية:

يشير المؤلفان إلى أن نسق حساب القضائيا ككل يمكن تأسيسه من خلال منهجين هما:

- ١ - منهج أو طريقة الافتراضات *Method of Assumptions*.
- ٢ - المنهج أو الطريقة الأكسيوماتيكية *Axiomatic Method*.

أما المنهج الأول وهو منهج الافتراضات فلم يدعى المؤلفان الفضل في ابتكاره، وهو ما يشيران إلى أن ياسكوفסקי Jaskowski وجنتيزن Gentzen بدماء وطوراه فيما بين الأعوام ١٩٣٤، ١٩٣٥؛ إلا أنهما يشيران

في نفس الوقت إلى اختلافات شديدة بين المفهومين، وقد عرض بوركوفسكي وسلويسكي في عام ١٩٥٨ لاقتراح منهج الافتراضات في ورقة قدماها بعنوان: نسق منطقى يستند إلى قواعد مع تطبيق على تعليم المنطق الرياضي - وقد جاء هذا العرض في مجلة الدراسات المنطقية Studia Logica العدد السابع، ثم طورا البحث في هذا الجانب فيما بعد في كتابهما عن عناصر المنطق الرياضي حيث عرضا لمجموعة من القواعد الابتدائية الداخلة في حساب القضايا مباشرة وهي :

١ - قاعدة الفصل The rule of detachment، ويرمز لها النسق بالرمز RD
وهذه القاعدة تقرر:

$$\text{RD} \quad \frac{\emptyset \rightarrow \varphi}{\varphi}$$

ويجب أن نلاحظ أن هذه القاعدة تطلق على قاعدتين معاً وهما:

(١) قاعدة التعمير Substitution، (٢) قاعدة الإثبات Modus Ponens، وقاعدة detachment تختلف عن قاعدة الفصل التي سيرد ذكرها فيما بعد.

٢ - قاعدة ربط الوصل The rule of Joining a Conjunction، ويرمز لها النسق بالرمز RC، وهي تقرر:

$$\text{RC} \quad \frac{\varphi}{\emptyset \wedge \varphi}$$

ويجري تطبيق هذه القاعدة على النحو التالي:

$$\frac{a < x \\ x < b}{a < x \wedge x < b}$$

أو بصيغة أخرى:

$$a < X < b$$

٣ - قاعدة حذف الوصل The rule of Omitting a Conjunction، ويرمز لها النسق بالرمز OC، وتقرر:

$$\text{OC}$$

$$\frac{\emptyset \wedge \varphi}{\emptyset,}$$

$$\frac{\emptyset \wedge \varphi}{\varphi}.$$

يعنى أنه إذا كان الوصل محتوى في البرهان، فإن أي عنصر من عناصر الوصل ينطبق عليه البرهان ذاته. وللهذه القاعدة صياغات أخرى منها:

$$\frac{\emptyset \wedge \varphi}{\emptyset}$$

$$\varphi$$

وبصورة أكثر عمومية:

$$\frac{\emptyset_1 \\ \vdots \\ \emptyset_n}{\varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k}$$

حيث إذا كانت الصيغة $\emptyset_1 \dots \emptyset_n$ محتواه في البرهان، فإن الصيغ $\varphi_1 \dots \varphi_k$ تتحقق بذات البرهان وينطبق عليها، مثال ذلك:

$$\frac{a < x \wedge x < b}{a < x} \quad (\text{or: } a < x < b) \quad \frac{a < x \wedge x < b}{x < b}.$$

٤ - قاعدة ربط الفصل The rule of Joining a disjunction التي يرمز لها النسق بالرمز JD، وتقرر:

$$JD \quad \frac{\emptyset}{\emptyset \vee \varphi} \quad \frac{\varphi}{\emptyset \vee \varphi}$$

تقرر هذه القاعدة أن الفصل قد يلحق بالبرهان إذا كان أحد عناصره محتوى في البرهان فعلاً. ومثال هذه القاعدة:

$$\frac{a > 0}{a > 0 \vee a = 0} \quad (\text{or: } a \geq 0) \quad \frac{a = 0}{a > 0 \vee a = 0}.$$

٥ - قاعدة حذف الفصل The rule of Omitting a disjunction ويرمز لها النسق بالرمز OD، وتقرر:

$$OD \quad \frac{\emptyset \vee \varphi}{\neg \emptyset} \quad \varphi$$

تقرر هذه القاعدة إنه إذا كان الوصل ونفي أحد عناصره محتوى في البرهان، فإنه المنصر الآخر للفصل يلحق بالبرهان ويعطبق عليه. خذ المثال التالي على الاستدلال بواسطة هذه القاعدة:

$$\frac{a > 0 \vee a = 0}{\neg a > 0} \quad a = 0.$$

٦ - قاعدة ربط التكافؤ The rule of joining an equivalence ويرمز لها النسق بالرمز JE، وتقرر أن:

$$JE \quad \frac{\begin{array}{c} \emptyset \rightarrow \varphi \\ \varphi \rightarrow \emptyset \end{array}}{\emptyset \equiv \varphi}$$

تقرر هذه القاعدة أن التكافؤ $\emptyset \equiv \varphi$ قد يلحق بالبرهان إذا كان البرهان محتواً على التضمن $\emptyset \rightarrow \varphi$ والتضمن العكس $\varphi \rightarrow \emptyset$.

٧ - قاعدة حذف التكافؤ The rule of omitting an equivalence ويرمز لها النسق بالرمز OE، وتقرر هذه القاعدة أن:

$$\text{OE} \quad \frac{\emptyset = \emptyset}{\emptyset \rightarrow \emptyset}, \quad \frac{\emptyset = \emptyset}{\emptyset \rightarrow \emptyset}.$$

حيث إذا كان أي تكافؤ ينتمي إلى البرهان إذاً فعليها أن تتحقق بالبرهان التضمن الذي مقدمه العنصر الأول من عناصر التكافؤ وتاليه العنصر الثاني، والتضمن الذي يكون عكس الأول. وفي هذه الحالة يسمى التضمن الأول تضمناً بسيطاً.

لكن ينبغي علينا أن نتساءل عن مصدر القواعد التي حددتها المنطقيان سلويسكي وبوركوفسكي. هل ابتكرتا القواعد السابقة؟ أم أنها وجدت لدى مناطقة آخرون في أوقات سابقة؟ إذا كانت هذه القواعد موجودة من قبل، هل استخدمت بنفس الصورة؟ أم أن نسق سلويسكي - بوركوفسكي أول ما استفاد من وضع هذه القواعد؟ علينا إذن أن نبحث هذا الجانب التطوري المنطقي.

المقررات والقواعد المشتقة :

يجدر بنا أن نثبت هنا بصورة سريعة ومحضرة ما سبق أن ذكرنا حول القاعدة السابعة السابقة. أول هذه القواعد تلك التي تعبّر عن التعريض والإثبات معاً ورمزنا لها بالرمز RD ، ثم ربط الوصل RC ، وحذف الوصل هي OC ، وربط الفصل JD ، وحذف الفصل OD ، وربط التكافؤ JE ، وحذف التكافؤ OE .

يركز نسق سلويسكي - بوركوفسكي على إعمال منطقى جيد ودقيق لقاعدة حذف الوصل OC كقاعدة مشتقة لبناء البرهان ابتداءً من الافتراضات، ويستخدم بالإضافة إلى هذا القواعد المنطقية الأخرى. ومن ثم نتساءل كيف يقدم لنا سلويسكي - بوركوفسكي في نسقهما الجديد طريقة جديدة بسيطة للبرهان، تعتمد على القواعد السابقة تحديدها؟ وهل يبرهن النسق على قوانين أو نظريات قديمة مألوفة، بصورة جديدة تقرب للذهن صورة القانون أو

النظرية موضع البرهان؟ هذا ما يتعين علينا أن ننظر فيه الآن من خلال براهين النسق المتعددة على القوانين الهامة.

١ - برهن النسق على القانون الثاني للقياس الشرطي والذي صورته:

$$T1. \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$]
(2)	$q \rightarrow r$	
(3)	p	
(4)	q	{ RD: 1, 3 }
	r	{ RD: 2, 4 }

نلاحظ أن الرمز T هنا يرمز إلى كلمة مقررة Thesis، ونلاحظ أيضاً أن البرهان يطبق القواعد مباشرة.

٢ - برهن على قانون التصدير والذي صورته:

$$T2 \quad (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

كان المنطقي الإيطالي جيوسيب بيانو Peano أول من حدد صورة مبدأ التصدير في كتابه *Formulaire de Mathematique*، وقد عرض رسل Russell لهذا المبدأ في «أصول الرياضيات» Principes of Mathematics (١٩٠٣)، ثم في «مبادئ الرياضيات» Principia Mathematica (١٩١٠ - ١٩١٣)، ثم في كتابه «مقدمة للفلسفة الرياضية» (١٩١٩). وفي القضية ٣,٣ حدد رسل - هو انتهت صورة مبدأ التصدير في «برنكيبيا» بالصيغة:

$$3.3 \quad [(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))]$$

نلاحظ إذن الشابه بين صورتي $T2$ ، ٣.٣ مع اختلاف الرموز المستخدمة وبرهن النسق الجديد على هذه المقررة كما يلي:

(1)	$p \wedge q \rightarrow r$	}	(a.)
(2)	p		
(3)	q		
(4)	$p \wedge q$		
r		$\{ JC: 2, 3 \}$ $\{ RD: 1, 4 \}$	

٣ - والصورة الأخرى المرتبطة بقانون التصدير T2، قانون الاستيراد الذي سبق أيضاً أن حده بيانو وبرهن عليه نسق بروكيبا. لكن نسق سلويسكي - بوروكوفسكي ينظر لقانوني التصدير والاستيراد على أنهما مترابطان، بمعنى أن القانون الثاني (الاستيراد) يحتبر حالة من حالات القانون الأول.

$$T2a. \quad [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	}	(a)
(2)	p		
(3)	q		
(4)	$q \rightarrow r$		
r		$\{ RD: 1, 2 \}$ $\{ RD: 4, 3 \}$	

والصورة الأخرى التي يقدمها النسق لهذه المفرودة هي :

$$T2b. \quad p \wedge q \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r).$$

البرهان

(1)	$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	{ T2 }
(2)	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$	
	$p \wedge q \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
		{ JE: 1, 2 }

يعتبر هذا البرهان صورة مباشرة للمفرودة السابقة، وكل جزء من أجزاء هذا البرهان هو في حد ذاته مقررة قائمة بذاتها ويمكن البرهنة عليها.

٤ - أما المقررة التالية فنقدم عليها البرهان بصورة غير مباشرة:

$$T4 \quad p \vee q \rightarrow (\neg q \rightarrow p).$$

البرهان

(1)	$p \vee q$	{a}
(2)	$\neg q$	
(3)	$\neg p$	{a-i-p}
(4)	q	{od: 1, 3}

كما هو ملاحظ يمكننا أن نبرهن أي صيغة لها الصورة:

$$\emptyset \vee \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \emptyset)$$

حيث \emptyset, φ هي أي صيغ في نظرية حساب القضايا. ونلاحظ أيضاً أن النتائج بصفة عامة ينظر إلى البرهان في مثل هذه الحالة على أنه يستند إلى الافتراضات ١، ٢ في البرهان السابق، وخطوات البرهان غير المباشر. وإذا طبقنا القاعدة OD على ١، ٣ فنحصل على φ في الخطوة الرابعة، ومن ثم يصبح البرهان كما يلي:

(1)	$\emptyset \vee \varphi$	{a}
(2)	$\neg \varphi$	
(3)	$\neg \emptyset$	{a-i-2}
(4)	φ	{OD: 1; 3}

وهذا ينافي الخطوة (٢؛ ٤)

على سبيل المثال: الصيغة:

$$(a) \quad (p \equiv q) \vee p \wedge r \rightarrow [\neg(p \wedge r) \rightarrow (p \equiv q)]$$

هذه الصيغة ترد إلى الصورة:

$$\emptyset \vee \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \emptyset)$$

حيث نلاحظ أن $\emptyset = (p \equiv q), \varphi = (p \wedge r)$ وفي هذه الحالة يكون البرهان كما يلي:

- | | | |
|-----|--------------------------------|------------|
| (1) | $(p \equiv q) \vee p \wedge r$ | {a} |
| (2) | $\neg(p \wedge r)$ | |
| (3) | $\neg(p \equiv q)$ | {a-i-p} |
| (4) | $p \wedge r$ | {OD: 1, 3} |

وهذا ينافي {٤، ٢}

من أجل هذا يضع نسق سلويسكي - بوركوفسكي المبرهنة الآتية:

مبرهنة ٤: أي صيغة في نظرية حساب القضايا لها الصورة:

$$\emptyset \vee \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \emptyset)$$

هي مقررة.

لكن النسق يضع لمعنى مقرر استعارة رمز فريجية الخاص بعلامة التقرير التي كان فتجنشتين قد اقترح إلغائها، فالصيغة $(\emptyset \text{ مقررة}) =$ في هذا النسق $(\emptyset \vdash \perp)$ ، وبذل تكتب المبرهنة السابقة كما يلي:

$$\vdash \emptyset \vee \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \emptyset)$$

وذلك حتى يسهل التعامل مع مقررات النسق ومبرهنته.

لكن ينبغي أن نلاحظ أن للمقدمة T4 صورة أخرى يمكن البرهنة عليها:

$$T4b \quad \neg(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

البرهان

- | | | |
|-----|------------------|------------|
| (1) | $\neg(p \vee q)$ | {a} |
| (2) | p | |
| (3) | $\neg q$ | {a, i, p} |
| (4) | $\neg p$ | {OD: 1, 3} |

وهذا ينافي {٤، ٢}

نلاحظ أن الصورة السابقة للمقرر T4 يطلق عليها قانون العلاقة بين الفصل والتضمن.

٥ - ويقدم النسق صورة لقاعدة حذف النفي المزدوج والتي يرمز لها بالرمز ON حيث:

$$T5a \quad p \rightarrow \neg \neg p$$

البرهان

(1)	$\neg p$	$\{a\}$
(2)	$\neg \neg \neg p$	$\{a-i-p\}$
(3)	$\neg p$	$\{ON: 2\}$

وهذا ينافق (١ ، ٣)

ويشتق من هذه القاعدة، قاعدة وصل النفي المزدوج JN، حيث:

$$T5b \quad \neg \neg p = p \quad (JE: T5; T5a)$$

ويناحظ على المقررة السابقة ما يلي :

Laws of double negation T5b، T5a، T5 - ١ يطلق عليها قوانين النفي المزدوج .negation

٢ - ونلاحظ كذلك بصفة خاصة أن القانون T5b يقرر أن النفي المزدوج للقضية مكافئ للقضية ذاتها. وقد لاحظ الرواقيون هذا الأمر قديماً وعرفوه جيداً.

٣ - كذلك يشتق من القاعدة JN (وصل النفي المزدوج) الصورة التالية:

$$\frac{\neg \emptyset \vee \varphi}{\varphi} \qquad \frac{\emptyset \vee \varphi}{\emptyset}$$

البرهان

(1)	$\omega \emptyset \vee \neg \omega$	}	{a}
(2)	ω		
(3)	$\neg \omega$		{JN: 2} {OD: 1; 3}

البرهان

(1)	$\neg \emptyset \vee \omega$	}	{a}
(2)	\emptyset		
(3)	$\neg \emptyset$		{JN: 2} {OD: 1; 3}

تجدر الملاحظة هنا إنه سبق للرواية أن قدمت هذه الصور، وتوسعت في استخدامها في نطاق منطق القضايا الشرطية^(١).

٦ - وقد أضاف النسق صورة قانون النقل The law of Transposition والتي تقررها المقررة:

$$T6 \quad p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	}	{a}
(2)	$\neg q$		
(3)	p	}	{a-i-p}
(4)	q		{RD: 1; 3}

وهذا تناقض {٤؛ ٢}، وبالمثل يمكن البرهنة على الشق الثاني من المبرهنة.

ويجب أن نلاحظ أن قاعدة قانون النقل الأساسية كانت معروفة لدى أرسطو، وكذلك يعتبر مبدأ النقل من المبادئ الأساسية التي

(١) راجع ما سبق أن ذكرناه حول هذا الموضوع في: المنطق الرياضي، مرجع سابق، ص ٢٠ - ٢٢.

استخليها نسق برنكبيا في صورة الأربع^(١) التي تحددها القضايا
 .(٢، ١٧، ٢، ١٦، ٢، ١٥، ٢، ٠٣)

٧ - وهناك صورة مركبة لقانون النقل تقررها المقررة:

T ٧

$$p \wedge q \rightarrow r = p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$$

البرهان

- | | | |
|--------------------------------|---|-----|
| (1) $p \wedge q \rightarrow r$ | } | {a} |
| (2) p | | |
| (3) $\neg r$ | | |
-
- | | | |
|------------------|---|------------|
| (4) q | } | {a-i-p} |
| (5) $p \wedge q$ | | {JC: 2, 4} |
| (6) r | | {RD: 1; 5} |

وهذا تناقض {٦، ٣}

٨ - قانون التبسيط The law of Simplification وصورته تقررها المقررة

T 10

$$q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

البرهان

- | | | |
|--------------|---|-----|
| (1) q | } | {a} |
| (2) p | | |
| (3) $\neg q$ | | |

وهذا تناقض {٣، ١}

٩ - قانون الذاتية للتضمين The Law of Identity for Implication وصورته:

T 11

$$p \rightarrow p$$

البرهان

- | | | |
|--------------|---|---------|
| (1) p | } | {a} |
| (2) $\neg p$ | | {a-i-p} |

تناقض {١، ٢}

(١) المرجع السابق، ص ١٠٩.

١٠ - قانون الذاتية للتكافؤ The law of Identity for equivalence
وصورته :

T 11a

$$p \equiv p$$

البرهان

- (1) $p \rightarrow p$
(2) $p \equiv p$

(T 11)
(JE: 1; 1)

١١ - وبرهن النسبت على علاقة التكافؤ بالتضمن كما يلي :

T 12

$$(p \equiv q) \rightarrow (q \equiv p)$$

البرهان

- (1) $p \equiv q$
(2) $p \rightarrow q$
(3) $q \rightarrow p$
 $q = p$

(a)
{OE: 1}
{OE: 1}
(JE: 3; 2)

يلاحظ أن صور المقررات T 11a ، T 12 تقر أن التكافؤ يتمتع بخاصية انعكاسياً وتماثلياً في نفس الورقة.

١٢ - والصور الآتية تحدد أن قاعدة الإثبات بالإثبات صحيحة بالنسبة للتكافؤ :

RD

$$\frac{\emptyset = \varphi}{\varphi}$$

$$\frac{\emptyset = \varphi}{\varphi}$$

البرهان

- (1) $\emptyset = \varphi$
(2) φ
(3) $\varphi \rightarrow \emptyset$
 \emptyset

}

{a}

{OE: 1}
(RD: 3; 2)

البرهان

- | | | |
|-----|---------------------------------|---|
| (1) | $\emptyset \equiv \varphi$ | $\{a\}$ |
| (2) | \emptyset | |
| (3) | $\emptyset \rightarrow \varphi$ | $\{\text{OE: 1}\}$
$\{\text{RD: 3, 2}\}$ |
| | φ | |

١٣ - يقدم النسق البرهان على المقررة التالية :

$$T\ 16a \quad (p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

البرهان

- | | | |
|-------|--|--|
| (1) | $p \rightarrow q \wedge r$ | $\{a\}$ |
| (1.1) | p | |
| (1.2) | $q \wedge r$ | $\{\text{RD: 1.1}\}$ |
| (1.3) | q | |
| (1.4) | r | $\{\text{OC: 1.2}\}$ |
| (2) | $p \rightarrow q$ | |
| (3) | $p \rightarrow r$ | $\{1.1 \rightarrow 1.3\}$
$\{1.1 \rightarrow 1.4\}$ |
| | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | |

١٤ - بضميررة المقادير :

$$T\ 17 \quad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$$

فيمكن البرهنة عليها على مراحلتين :

البرهان (أ) المرحلة الأولى

- | | | |
|-----|-------------------|--|
| (1) | $p \rightarrow r$ | $\{a\}$ |
| (2) | $q \rightarrow r$ | |
| (3) | $p \vee q$ | |
| (4) | $\neg r$ | $\{a, i, p\}$ |
| (5) | $\neg p$ | |
| (6) | $\neg q$ | $\{\text{toll.: 1, 4}\}$
$\{\text{toll.: 2, 4}\}$ |
| (7) | q | |

تناقض $\{\neg r, \neg p\}$

البرهان (ب) المرحلة الثانية

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$p \vee q$	{JD: 1.1}
(1.3)	r	{RD: 1, 1.2}
(2)	$p \rightarrow r$	{1.1 \rightarrow 1.3}
(2.1)	q	{ad. a}
(2.2)	$p \vee q$	{JD: 2.1}
(2.3)	r	{RD: 1, 2.2}
(3)	$q \rightarrow r$	{2.1 \rightarrow 2.3}
	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	{JC: 2, 3}

نلاحظ أن البرهان على المقررة التي لدينا هام ومفيد في حالات الجبر المألوف، فباستخدام المقررة، نجد أن الشرط في الصورتين التاليتين :

$$x \leq -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (1)$$

أو الصورة

$$x < -2 \vee x = -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (2)$$

يكافىء

$$x < -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (1')$$

$$x = -2 \rightarrow f(x) > 0 \quad (2')$$

هذا التضمين البسيط هو ما نطلق عليه قانون إضافة المقدمات
The law of addition of antecedents

١٥ - قاعدة الإرجاع المركب التي تنص عليها المقررة:

$$T\ 18 \quad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \wedge q) \rightarrow r$$

هذه الصيغة تسمح لنا بأن نستبعد من مقدمتين لهما التالي نفسه والفصل بين المقدمتين، تسمح لنا باستنطاق تالي التضمن. والمثال التالي يوضح لنا كيفية الاستدلال بالقاعدة السابقة.

$$\begin{array}{c} n = 1 \rightarrow (n + 1)^2 > n^2 \\ n > 1 \rightarrow (n + 1)^2 > n^2 \\ \hline n = 1 \vee n > 1 \\ (n + 1)^2 > n^2 \end{array}$$

١٦ - قانون سلب الفصل The law of negating a disjunction الذي تقرره المقررة:

T 19

$$\neg(\neg p \vee q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg q$$

البرهان

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	$p \vee q$	{JD: 1.1}
(2)	$\neg p$	{1.1 \rightarrow Contr. (1, 1.2)}
(2.1)	q	{ad. a}
(2.2)	$p \vee q$	{JD. 2.1}
(3)	$\neg q$	{2.1 \rightarrow Contr. (1, 2.2)}
	$\neg p \wedge \neg q$	{JC. 2, 3}

وي باستخدام المقررة السابقة يصبح سلب الفصل مكافئاً لوصول عناصر نفيه، على سبيل المثال:

$$(1) \text{ الصيغة } \neg(a > b \vee a = b)$$

$$7) \text{ تكافئه الصيغة } \neg a > b \wedge \neg a = b$$

كذلك يمكن أن نشتق من المقررة السابقة قاعدة الفصل السالب على النحو التالي:

$$\begin{array}{c} ND \quad \frac{\neg(\emptyset \vee \emptyset)}{\neg\emptyset} \quad \frac{\neg(\emptyset \vee \emptyset)}{\neg\emptyset \wedge \neg\emptyset} \\ \hline \end{array}$$

١٧ - قانون سلب الوصل The law of negating a Conjunction تقرره المقررة:

$$T\ 20 \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

البرهان

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{a}
(2)	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	{a-i-p}
(3)	$\neg\neg p$	{ND. 2}
(4)	$\neg\neg q$	{ND. 2}
(5)	p	{ON. 3}
(6)	q	{ON. 4}
(7)	p \wedge q	{JC. 5, 6}

وهكذا يمكن الاستمرار في البرهان على الجزء الثاني.

لكتنا نلاحظ أن المقررة T 19 وكذا المقررة T 20 متشابهتان من حيث التركيب. وقد سبق أن وجدناهما من قبل لدى المنطقي دي مورجان، وعرفهما منطقة القرن التاسع عشر باسم قوانين دي مورجان. والأكثر من هذا إنهمما وجدتا لدى منطقة القرنين الرابع عشر والخامس عشر، خاصة لدى أوكيام (ق ١٤٠).

١٨ - قانون عدم التناقض الذي تقرره المقررة:

$$T\ 22 \quad \neg(p \wedge \neg p)$$

البرهان

(1)	$p \wedge \neg p$	{A-A}
(2)	p	
(3)	$\neg p$	{OC. 1}

تناقض {٢، ٣}.

١٩ - قانون الثالث المرفوع وصورته تقررها المقررة:

$$T\ 23 \quad p \vee \neg p$$

البرهان

(1)	$\neg p \vee (p \wedge \neg q)$	{a-i-p}
(2)	$\neg p$	{ND. 1}
(3)	$\neg \neg p$	

تناقض {٢، ٣}.

نلاحظ على المقررتين السابقتين (قانون عدم التناقض، قانون الثالث المرفوع) أن أرسطو أول من قدم صياغة لهما، وأنه أول من قدم الصياغة الميتامنطقية لهما، حيث يعني قانون عدم التناقض أن المتناقضتين لا تصدقان معاً. ويعني قانون الثالث المرفوع أن واحدة فقط من القضيتين المتناقضتين يجب أن تكون صادقة - لقد دافع أرسطو في كتاب الميتافيزيقا عن قانون الثالث المرفوع، وامتحن صحة القانون ومشروعيته بالإشارة إلى حوادث المستقبل غير المحددة، وقرر في هذا الصدد أن تبني هذا القانون بالنسبة لحوادث المستقبل سيففضي إلى النتيجة القائلة بأن كل شيء سوف يحدث هو ضروري. إلا أن لوكاشيفتش في الربع الأول من هذا القرن، خاصة فيما بين الأعوام ١٩١٨ - ١٩٢٠ حين أسس حساب المنطق الثلاثي القيم لم يستعن بقانون الثالث المرفوع، ولم يتبيّن أية ضرورة فيه.

٢٠ - قانون العامل الجديد The law of a New Factor وهو ما تقرره المقررة:

$$T\ 24 \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$$

هذا القانون يمكّن البرهنة عليه بنفس الصيغة السابقة للبرهان، إلا أن أهميته تبدو أكثر في استخدامه كصورة من صور الاستدلال، مثل الصورة التالية:

$$\frac{a > 2 \rightarrow a > 0}{a > 2 \wedge a < 9 \rightarrow a > 0 \wedge a < 9}$$

أو

$$2 < a < 9 \rightarrow 0 < a < 9$$

٢١ - قانون العامل الجديد The law of a new element و تقرره المقررة :

$$T\ 26 \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$$

البرهان

$$\begin{array}{lll} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & p \vee r \\ (1.1) & p & \{ad. a\} \\ (1.2) & q & \{RD. 1, 1.1\} \\ (1.3) & q \vee r & \{JD. 1.2\} \\ (2.1) & r & \{ad. a\} \\ (2.2) & q \vee r & \{JD. 2.1\} \\ & q \vee r & \{1.1 \rightarrow 1.3, 2.1 \rightarrow 2.2, 2\} \end{array}$$

٢٢ - قانون إضافة التضمن الذي تقرره المقررة :

$$T\ 27 \quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$$

البرهان

$$\begin{array}{lll} (1) & p \rightarrow q \\ (2) & r \rightarrow s \\ (3) & p \vee r \\ (1.1) & p & \{ad. a\} \\ (1.2) & q & \{RD. 1, 1.1\} \\ (1.3) & q \vee s & \{JD. 1.2\} \\ (2.1) & r & \{ad. a\} \\ (2.2) & s & \{RD. 2, 2.1\} \\ (2.3) & q \vee s & \{JD. 2.2\} \\ & q \vee s & \{1.1 \rightarrow 1.3, 2.1 \rightarrow 2.3, 3\} \end{array}$$

وهناك المثال الآتي لتطبيق هذا القانون في حالات العبر المألف:

$$\begin{array}{c} a > b \rightarrow a^2 > b^2 \\ a = b \rightarrow a^2 = b^2 \\ \hline a > b \vee a = b \rightarrow a^2 > b^2 \vee a^2 = b^2 \end{array}$$

or:

$$a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2$$

٢٣ - وكذلك المقررة:

$$T\ 29 \quad \neg(p \vee q) \equiv (p \rightarrow q)$$

هذه المقررة سبق لنا أن قلمنا برهاناً على الشق الأول منها $\neg p \vee q$ في المقررة T 4 b، ولذا نقدم البرهان هنا على الشق الثاني.

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$	{a}
(1.1)	p	{ad. a}
(1.2)	q	{RD: 1, 1.1}
(1.3)	$\neg p \vee q$	{JD: 1.2}
(2.1)	$\neg p$	{ad. a}
(2.2)	$\neg p \vee q$	{RD: 2.1} \rightarrow {1.1 \rightarrow 1.3, 201 \rightarrow 2.2}

٤٤ - ويرهن نسق سلويسكي - بوركوفسكي على قانون الأنساق المغلقة للمصادرات، والذي قد يسمى أحياناً عكس التضمن، أو قانون هوبير وهو ما تقرره Hauber's law

$$T\ 32 \quad (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \neg(q \wedge s) \rightarrow (q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$$

البرهان

(1)	$p \rightarrow q$]	(a.)
(2)	$r \rightarrow s$		
(3)	$p \vee r$		
(4)	$\neg(q \wedge s)$		
(5)	$\neg q \vee \neg s$		
(1.1)	q		$\{RD_E: T 20, 4\}$
(1.2)	$\neg s$		$\{\text{OD: } 5, 1.1\}$
(1.3)	$\neg r$		$\{\text{toll. : } 2, 1.2\}$
(1.4)	p		$\{\text{OD: } 3, 1.3\}$
(6)	$q \rightarrow p$		$\{1.1 \rightarrow 1.4\}$
(2.1)	s		$\{\text{ad. a}\}$
(2.2)	$\neg q$		$\{\text{OD: } 5, 2.1\}$
(2.3)	$\neg p$		$\{\text{toll. : } 1, 2.2\}$
(2.4)	r		$\{\text{OD: } 3, 2.3\}$
(7)	$s \rightarrow r$		$\{2.1 \rightarrow 2.4\}$
	$(q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r)$		$\{\text{JC: } 6, 7\}$

ولكن يجب أن نلاحظ أن هذه المقررة في غاية الأهمية، إذ قد تشق منها قواعد تطبيقية ذات فائدة كبيرة، فإذا كان عدد التضمينات التي لدينا n فإن قاعدة التضمينات العكسية في هذه الحالة تأخذ الصورة التالية:

$$\begin{array}{c}
 \emptyset_1 \rightarrow \varphi_1 \\
 \emptyset_2 \rightarrow \varphi_2 \\
 \dots \\
 \emptyset_1 \vee \emptyset_2 \vee \dots \vee \emptyset_n \\
 \hline
 T(\varphi_i \wedge \varphi_j) \text{ for } 1 \leq i \neq j \leq n \\
 \varphi_1 \rightarrow \emptyset_1 \\
 \varphi_2 \rightarrow \emptyset_2 \\
 \dots \\
 \varphi_n \rightarrow \emptyset_n
 \end{array}$$

معنى هذا أنه إذا كان لدينا n من التضمنات المثبتة والفصل المتعلق بمقدمات تلك التضمنات، وإذا كان تاليها يستبعد تلقائياً الواحد بعد الآخر، إذن فإنه سيكون بإمكاننا أن نعكس كلاً من هذه التضمنات.

إن السؤال الآن هو: لقد قدم لنا نسق البرنكيبيا تعريفات متعددة للدوال القضائية، وهذه التعريفات وغيرها من الدوال الأخرى يمكن لها في صورة القوانين المحددة التي وضعت للوصول والفصل والتضمن والسلب، أن تزودنا بقيم لصدق تلك الدوال عن طريق قوائم الصدق، فيكون وبالتالي من المألف للدينا أن نستخدم قائمة الصدق، ونبرهن بها على صحة التعريفات المعطاة، فتصبح قائمة الصدق أيضاً وسيلة أساسية - غير طريق البرهان المألف - للبرهنة على صحة ضروب القياس مثلاً. ونحن نجد الآن في نسق سلوسيكي - بوركوف斯基 تقريراً لكثير من المقررات، مثل التي قدمتنا طرفاً منها وغيرها، وما يبرهن عليها بصورة رياضية، بدون استخدام قوائم الصدق. إلا يمكن أن نجد في النسق الذي قدمناه إذن ما يشير إلى استخدام قوائم الصدق؟.

الراهن أن نسق سلوسيكي - بوركوف斯基 يمسح مجالاً هاماً يتعاون معه المسألة بصورة دقيقة، وأكثر تحديداً مما ناله. إذ أن النسق يلتجأ إلى ما يطلق عليه «منهج الصفر - واحد» Zero - One method لتحقيق الصيغة التي لدينا. وقد ييلو هذا المصطلح على درجة من الغموض؛ إلا أن المسألة ليست كذلك. نحن نعلم أن للقضية الواحدة قيمة صدق، وقيمة كذب. إذا كانت القضية صادقة True، أشرنا إليها في الأنساق المألوفة لنا مثل نسق برنكبي بالمخصر T، أما إذا كانت القضية كاذبة False فإننا نشير إليها بالمخصر F. لكن نسق سلوسيكي - بوركوف斯基 أراد أن يتخلص من هذين الرمزين؛ ويستخدم قيمتين علديتين هنا الواحد، والصفر، ويرمز لهما على التوالي: 1، 0. وعلى هذا الأساس يقدم لنا النسق صياغة جديدة للدوال المختلفة على النحو التالي:

(١) السلب negation

\emptyset	$\neg \emptyset$
1	0
0	1

نلاحظ أن القضية $\neg \emptyset$ تكون كاذبة عندما تكون \emptyset صادقة، وكذلك تكون $\neg \emptyset$ صادقة بينما تكون \emptyset كاذبة. وهذا هو قانون السلب المألوف كما نجده في نسق برنكبيبا.

(٢) قائمة الوصل Conjunction

\emptyset	φ	$\emptyset \wedge \varphi$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

يقرر قانون الوصل في هذه الحالة، أن الوصل يصدق فقط إذا كان كلا من عناصره صادقاً، ويكون الوصل كاذباً إذا كذب أحد عناصره على الأقل.

(٣) قائمة الفصل disjunction

\emptyset	φ	$\emptyset \vee \varphi$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

الفصل يصدق فقط وفقط إذا صدق أحد عناصره على الأقل، ويكتبه الفصل إذا كذب عنصراً معاً.

لكن ينبغي أن نلاحظ أن النسق يقرر التمييز الدقيق بين الفصل غير الاستبعادي non - exclusive، والفصل الاستبعادي exclusive. أما

النوع الذي قدمناه تواً في القائمة السابقة فهو الفصل الاستبعادي وهو المألوف لدينا. وأما النوع الثاني من الفصل، فهو ما توضحه القائمة:

\emptyset	q	$\emptyset \vee q$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

ومعنى هذا أن الفصل الاستبعادي يصدق فقط وفقط إذا صدق عنصر واحد من عناصره فقط، ويكتب إذا صدق عنصراً معاً، أو إذا كذباً معاً. والسبب في اعتبار هذا الفصل استبعادي هو أن صدق عنصر واحد فيه فقط يستبعد صدق المنصر الآخر حين يكون الفصل صادقاً ككل.

ولقد جاء التمييز بين هذين النوعين بناءً على التمييز بين صورتين لغويتين هما:

- (١) أن التعبير عن الفصل في اللغة الانجليزية الدارجة يتم إذا قلنا (or q) ، أي [p or q] . نلاحظ هنا الثابت (... or ...).
- (٢) وكذلك الصيغة (either p or q) ، حيث نلاحظ (either... or...) وهي أيضاً صيغة تعبر عن الفصل.

والمعلوم أن نسق برنكبيا وحدٌ بين الصيغتين واستخدام الثابت \vee للتعبير عن الفصل إجمالاً. إلا أن نسق سلوسكي - بوركوف斯基 وجد ضرورة التمييز بينها على النحو التالي:

- (') الصيغة (p or q) تكتب $(p \vee q)$.
- (c) الصيغة (either p or q) تكتب $(\emptyset \vee q)$.

(٤) قائمة التضمن Implication

\emptyset	φ	$\emptyset \rightarrow \varphi$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

يكون التضمن بمقتضى هذه القائمة كاذباً فقط وفقط إذا كان مقدمة صادقاً وتاليه كاذب. ويصدق التضمن في بقية الحالات الأخرى.

(٥) قائمة التكافؤ equivalence

يم تم التوصل لقائمة صدق التكافؤ من قائمة صدق التضمن قاعدة وصل التكافؤ وحذف التكافؤ، على النحو التالي:

\emptyset	φ	$\emptyset \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \emptyset$	$\emptyset \equiv \varphi$
1	1	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	0	1	1	1

نلاحظ أن التكافؤ يصدق في الحالة الأولى وكذلك الحالة الرابعة من قاعدة وصل التكافؤ التي تقرر أنه إذا كانت التضمينات البسيطة - العكسية صادقة فإن التكافؤ يكون صادقاً. أما في الحالة الثانية فإن التضمن العكسي $\emptyset \rightarrow \varphi$ يكون كاذباً وهو يتبع بموجب الصيغة الثانية من قاعدة حذف التكافؤ.

$$\frac{\emptyset \equiv \varphi}{\varphi \rightarrow \emptyset}$$

ويبدا يكون التكافؤ $\emptyset \equiv \psi$ كاذباً أيضاً. أما في الحالة الثالثة، فإن التضمن البسيط $\psi \rightarrow \emptyset$ يكون كاذباً وذلك بمقتضى قاعدة حذف التكافؤ.

$$\frac{\emptyset \equiv \psi}{\emptyset \rightarrow \psi}$$

التي يتبع منها أن التكافؤ $\emptyset \equiv \emptyset$ كاذب أيضاً.

ومن ثم فإن القائمة السابقة تقرر القانون الآتي للتكافؤ: التكافؤ يكون صادقاً فقط وفقط إذا كان عنصراه لهما نفس قيمة الصدق، ويكون الكاذب التكافؤ فقط وفقط إذا كانت قيم صدق عنصراه مختلفة.

المراجع

أولاً: المراجع العربية:

- ١ - الدكتور محمد ثابت الفتني ، فلسفة الرياضة ، دار النهضة العربية ، بيروت ، ١٩٦٩ .
- ٢ - برتراند رسل ، مقدمة للفلسفة الرياضية ، ترجمة د. محمد مرسي أحمد ١٩٦٣ .
- ٣ - يان لوكياشيفتش ، نظرية القياس الأرسطية ، ترجمة د. عبد الحميد صبرة ، منشأة المعارف ، الاسكندرية ، ١٩٦١ .
- ٤ - الدكتور ماهر عبد القادر محمد: نظريات المنطق الرياضي ، دار المعرفة الجامعية ، الاسكندرية ١٩٧٩

ثانياً: الدوريات الأجنبية:

- ١ — Helmer, O., On The Theory of axiom- System, Analysis, Vol. 3, 1935.
- ٢ — Lewis, C. I., Alternative Systems of Logic, Monist, 42, 1932.

ثالثاً: المراجع الأجنبية:

- ١ — Aristotle, *Analytica Priora*.
- ٢ — Bell, E. T., *The Queen of the Sciences*, Baltimore, Williams and Wilkins, 1931.
- ٣ — Heath, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge, England, The University Press, 1908.
- ٤ — Henkin, L. and Suppes, P. and Tarski, A., *The Axiomatic Method*, Amsterdam, North - Holland pub, Co., 1959.
- ٥ — Lewis, C. I., *A Survey of Symbolic logic*, Berkeley, 1918.
- ٦ — _____ and Langford, C.H., *Symbolic Logic*, New York, 1932.
- ٧ — Quine, W. V., *Mathematical Logic*, New York, 1940.
- ٨ — _____, *Elementary Logic*, Boston, 1941.
- ٩ — _____, *From a Logical point of view*, Harvard, New York, 1953.
- ١٠ — _____, *Selected logic papers*, New York, 1966.
- ١١ — _____, *Methods of logic*, 3rd, ed. London, 1974.
- ١٢ — Reichenbach, H., «Bertrand Russell's Logic», ed. in *The Philosophy of Bertrand Russell* by P. A. Schipp, 1944.
- ١٣ — Struik D. J., *A Concise History of Mathematics*, 2 Vols, Dover pub, New York, 1948.
- ١٤ — Whitehead, A.N and Ressell, B., *Principia Mathematica*, 3 vol, Cambridge, Cambridge University Press, 1910 - 1913.

فهرست الموضوعات

٧	إهداء
٩	تصدير

القسم الأول

٨٤ - ١٣	فكرة التضمن في الأنساق المنطقية المعاصرة
١٥	الفصل الأول : لويس والتضمن الدقيق
٣٥	الفصل الثاني : لوكاشيفتش والمنطق متعدد القيم
٤٩	الفصل الثالث : هلبرت والصورية البحتة
٥٩	الفصل الرابع : كوبن وحركة تصحيح المفاهيم

القسم الثاني

١٢٨ - ٨٥	نظيرية حساب التضاعيا في أنساق المنطق البولندي
الفصل الخامس : يان لوكاشيفتش ومقدمات النسق الاستباقي لنظرية حساب التضاعيا	٨٧
الفصل السادس : سلوبيكى - بوروكوفسكي والنسلق المتكامل لنظرية حساب التضاعيا	١٠١
المراجع	١٢٩



أ. علاء الدين شوقي

www.lisanarb.com